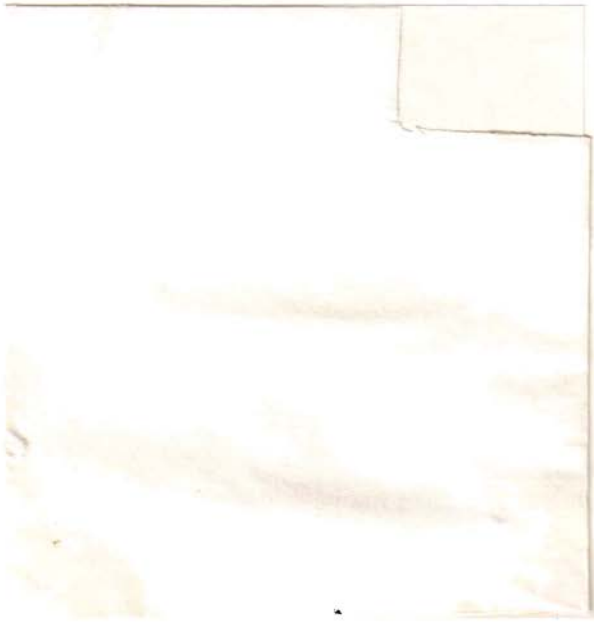
Octav Onicescu

# MECANICA INVARIANTIVĂ ȘI COSMOLOGIA



# MECANICA INVARIANTIVĂ ȘI COSMOLOGIA

1988

Octav
Onicescu

7
1995

# MECANICA INVARIANTIVĂ ŞI COSMOLOGIA

EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREŞTI, 1974

3
2000

Coperta de: *Transilvania Ierulescu*

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
Str. Gutenberg nr. 3 bis
Sector 6

# CUPRINS


**Cuvînt înainte** . . . . . 7

Capitolul **I.** **Mişcarea punctului material** . . . . . 9
§ 1. Mişcarea inerţială . . . . . 9
§ 2. Universul Minkowski-Einstein . . . . . 13
§ 3. Fotonul şi unda asociată mişcării punctului material 16
§ 4. Mişcarea într-un cîmp . . . . . 19
§ 5. Universuri antiminkowskiene . . . . . 25

Capitolul **II.** **Mişcarea corpusculelor stabile** . . . . . 28
§ 1. Mişcarea inerţială . . . . . 28
§ 2. Mişcarea într-un cîmp . . . . . 34

Capitolul **III.** **Mecanica invariantivă a sistemelor de puncte materiale** 41
§ 1. Sistemul inerţial a două puncte materiale . . . . . 41
§ 2. Interpretarea newtoniană. Două legi universale de interacţiune . . . . . 50

Capitolul **IV.** **Mecanica invariantivă a sistemelor continue** . . . . . 52
§ 1. Principii . . . . . 52
§ 2. Mişcarea pur inerţială a componentelor . . . . . 52
§ 3. Relaţiile între mărimile de mişcare rezultînd din constrîngerile interne ale sistemului . . . . . 54
§ 4. Constrîngerile externe . . . . . 59
§ 5. Cîmpuri în general . . . . . 61

Capitolul **V.** **Sistemul a două corpuri (corpusculе stabile)** . . . . 62
§ 1. Mişcarea inerţială a unui sistem de două corpuri . . 62
§ 2. Ecuaţiile mişcării . . . . . 66

Capitolul **VI.** **Cosmologia invariantivă** . . . . . 67
§ 1. Introducere . . . . . 67
§ 2. Mecanica invariantivă a sistemului $\mathscr{S}_n$ . . . . . 68
§ 3. Ipoteza numărului infinit al galaxiilor . . . . . 75
§ 4. Interpretarea newtoniană. Cele două feluri de forţe inerţiale . . . . . 77
§ 5. Consideraţii finale asupra ipotezelor folosite în extinderea cosmologiei . . . . . 77

Capitolul **VII.** **Cosmologia relativistă** . . . . . 78
§ 1. Cosmologia lui Albert Einstein . . . . . 78
§ 2. Necontradicţia dintre cosmologia stării staţionare şi aceea mecanică . . . . . 80

Capitolul **VIII.** **Comentarii** . . . . . 81
§ 1. Spaţii şi axiome ale mişcării . . . . . 81
§ 2. Principii şi postulate . . . . . 85
§ 3. Spaţii fibrate şi reprezentarea ecuaţiilor mişcării . . . 89
§ 4. Forţe şi legături . . . . . 93

**Mişcarea periheliului** (Notă de Ieronim Mihăilă) . . . 96

**Bibliografie** . . . . . 100

**The invariantive mechanics and cosmology** . . . . . 101

**Table of contents** . . . . . 103

# CUVÎNT ÎNAINTE

*Mecanica este știința mișcării corpurilor Universului material. Acest cadru al experienței a fost conceput în mod variat de-a lungul timpurilor:*

*Uneori foarte complet și precis, în înțelesul că Universul cuprinde atît lumea stelelor, aceea a sistemului solar cît și a corpurilor experienței terestre; așa era în mecanica lui Aristot ca și în aceea a lui Ptolemeu, însă fiecare dintre aceste lumi cu regulile sale de mișcare. Un principiu cu adevărat mecanic și unic pentru tot Universul a fost formulat pentru prima oară de Arhimede, dar fără să fi încercat aplicarea acelui principiu al pîrghiei, principiu de echilibru universal între acțiuni și reacțiuni, la o teorie efectivă.*

*În lumea modernă și-a făcut loc ideea identității materiale între corpurile cerești, stele, soare, planete, comete, și corpurile Pămîntului, a avut o primă mare victorie cu teoria copernicană, fiind consemnată în aceeași vreme ca un adevăr indiscutabil în manuscrisele lui Leonardo și a înregistrat victoria definitivă odată cu cuceririle telescopului lui Galilei.*

*Odată cu această certitudine a identității de substanță între corpurile Universului s-a constituit și știința, cu pretenții universale, a mișcării lor. La început, mai limitat, cu Galilei, la mișcările sub stăpînirea propriei greutăți, aici pe Pămînt, apoi cu Newton pentru toate mișcările pe Pămînt și în sistemul planetar, aspirînd de atunci pînă în zilele noastre la cuprinderea întregului Univers, conceput ca o unitate de corpuri materiale într-un sistem de interacțiuni care îi mențin stabilitatea, asigurîndu-i prin aceasta existența.*

*Descoperirile astronomice în ritm accelerat de la Newton pînă azi au întărit această idee de unitate a Universului, care a culminat cu descoperirea fenomenului dilatației, stăpînit de legea cu caracter universal a lui Hubble.*

*Acestui moment culminant al cunoașterii experimentale i-a corespuns și apariția teoriei relativității, care ne-a iluzionat o clipă cu o imagine geometrică a acestui Univers în totalitatea sa spațială și eternitatea sa temporală, încercînd să explice prin gravitație, ca determinantă a structurii sale materiale, proprietățile sale de ansamblu.*

*Preluînd această poziție, a unei științe a mișcării în care prezența întregului Univers se resimte în fiecare dintre componentele sale, însă nu pe căi structural geometrice, ci pe calea analizei proceselor elementare de mișcare, pe linia gîndirii newtoniene, Mecanica invariantivă, fără a părăsi cadrul spațio-temporal al vechii științe, a regăsit gravitația ca interacțiune inerțială a maselor și alături de ea, puțin sensibilă la distanțele curente, dar foarte sensibilă la distanțele intergalactice, o interacțiune de depărtare, similară unei forțe elastice, în mare parte responsabilă de dila-*

*tarea lui Hubble și în aceeași vreme de menținerea stabilității acestui Univers, în limitele sale, cu necesitate finite.*

*Elaborarea acestei doctrine a început cu studiile „O nouă mecanică a sistemelor materiale" (Revista Universității și a Politehnicii din București, nr. 3, 1954), „Introduction à une mécanique invariante des systèmes (Revue de Math. pures et appliquées, t. II, 1957), „Une Mécanique des systèmes inértiaux. Une théorie de la gravitation. Une mécanique des petites distances" (Journal of Math. and Mech., t. 5, no. 7, 1958).*

*Aceste lucrări au fost urmate de altele privind sistemele continue ca, de exemplu, „Die Mechanik des starren Körpers" (Revue de mécanique appliquée, t. III, nr. 3, 1958), „La mécanique de certaines particules stables" (Rendiconti Sem. Math. Univ. Padova, t. 28, 1958), „On the two bodies Problem" (Revue de math. pures et appliquées, Bucarest, t. V, nr. 1, 1960), „L'Univers antiminkowskien" (Revue de physique, Acad. RPR, t. V, nr. 3—4, 1961), precum și „Lecțiile" de la Institutul de mecanică al Universității din Trieste 1964, cînd am fixat și denumirea de „mecanică invariantivă" acestei noi mecanici.*

*O sinteză parțială a teoriilor a apărut în partea a doua a volumului „Mecanica" (Editura tehnică, București, 1969).*

*Cu acest prilej a fost publicat și rezultatul surprinzător că legea empirică a lui Hubble corespunde legii teoretice de conservare a impulsului oricărui sistem de două galaxii suficient de stabile.*

*Într-un memoriu ulterior, apărut în „Comptes Rendus" al Academiei de Științe din Paris, în toamna 1972, am putut arăta că legea lui Hubble se verifică pentru orice pereche de galaxii — cu suficientă stabilitate — în cadrul interacțiunilor întregului sistem de corpuri ale Universului.*

*În chiar perioada tipăririi acestui volum astronomul Ieronim Mihăilă a arătat că, introducînd o corecție foarte naturală și simplă la legea gravitației, așa cum apare în mecanica invariantivă, se obține și deplasarea seculară observată pentru periheliul lui Mercur.*

OCTAV ONICESCU

19.XI.1973

Capitolul I

# MIŞCAREA PUNCTULUI MATERIAL

## § 1. Mişcarea inerţială

1. *Punctul material.* Punctul material ca obiect al mecanicii este caracterizat prin doi vectori ai spaţiului cu patru dimensiuni $S_4$:

a. Vectorul poziţie-moment $(\rho, t)$, $\rho$ fiind vectorul de componente $x_1, x_2, x_3$ în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni $E_3$. Sistemele de referinţă în spaţiul $E_3$ şi în timp sînt sistemele inerţiale newtoniene.

b. Vectorul impuls-energie $(\mathbf{p}, E)$, unde impulsul $\mathbf{p}$ are componentele $p_1, p_2, p_3$, iar $E=E(\alpha)$ fiind o funcţie încă necunoscută de invariantul

$$\alpha = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2. \tag{1}$$

2. *Mişcarea punctului material* caracterizat prin aceste elemente este indicată prin operatorul diferenţial d, care este definit cu ajutorul diferenţialei geometrice a vectorului impuls-energie.

Diferenţiala geometrică a vectorului $(\mathbf{p}, E)$ este definită, cu ajutorul derivatei exterioare a formei

$$\omega_\delta = \mathbf{p}\cdot\delta\rho - E\delta t, \tag{2}$$

şi anume:

$$D\omega_\delta = \mathrm{d}\omega_\delta - \delta\omega_\mathrm{d} = \mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\delta\rho - \mathrm{d}E\,\delta t - \mathrm{d}\rho\delta\mathbf{p} + \mathrm{d}t\,\delta E$$

sau încă

$$D\omega_\delta = \mathrm{d}\mathbf{p}\cdot\delta\rho + (E'(\alpha)\mathbf{p}\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}\rho)\,\delta\mathbf{p} - \mathrm{d}E\cdot\delta t. \tag{3}$$

Componentele diferenţialei geometrice $D(\mathbf{p}, E)$ ale vectorului impuls-energie sînt reprezentate prin coeficienţii variaţiilor $\delta\rho$, $\delta\mathbf{p}$, $\delta t$ în expresia $D\omega_\delta$, şi anume sînt

$$\mathrm{d}\mathbf{p},\ E'(\alpha)\mathbf{p}\,\mathrm{d}t - \mathrm{d}\rho,\ \mathrm{d}E. \tag{4}$$

3. Principiul 1. *Operatorul mişcare* d *este definit prin condiţia de anulare a diferenţialei geometrice a vectorului impuls-energie,*

$$D(\mathbf{p}, E) = 0, \tag{5}$$

*ceea ce dă ecuaţiile*

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \qquad E'(\alpha)\mathbf{p} = \frac{d\rho}{dt} = \mathbf{v}, \qquad \frac{dE}{dt} = 0. \tag{6}$$

Ultima ecuaţie fiind identică cu

$$E'(\alpha)\mathbf{p}\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0,$$

este verificată odată cu ecuaţia $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$ şi are drept consecinţă imediată

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \qquad E(\alpha) = E(\alpha_0), \tag{7}$$

ceea ce înseamnă că:

Impulsul rămîne constant în timpul mişcării inerţiale.

O altă formă a principiului 1 este următoarea:

Operatorul mişcare d este definit prin condiţia de a anula derivata exterioară $D\omega_\delta = d\omega_\delta - \delta\omega_d$ a formei fundamentale $\omega_\delta$, oricare ar fi $\delta$.

Echivalenţa dintre cele două expresii ale principiului 1 este evidentă.

4. *Determinarea expresiei impulsului, a masei şi a energiei.* A doua ecuaţie vectorială din (6) ne dă, pentru impuls, expresia

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \tag{8}$$

după ce am pus $\mathbf{v} = \dot{\rho}$ şi $m = \frac{1}{E'(\alpha)}$, cu condiţia, care rămîne să se verifice ulterior, $E'(\alpha) \neq 0$.

Fiind dată expresia (8), $m$ reprezintă masa punctului material.

Folosind (8), forma fundamentală $\omega_\delta$ se poate scrie

$$\omega_\delta = m\left(\mathbf{v}\cdot\delta\rho - \frac{E}{m}\delta t\right). \tag{9}$$

Observăm acum pe de o parte că din însăşi enunţarea legii de mişcare rezultă că forma $\omega_\delta$ cuprinde toate elementele mişcării, iar pe de alta că spaţiul $S_N$ fiind uniform şi izotrop mişcarea punctelor materiale nu se diferenţiază cînd trecem de la punct la punct, în afară de

poziţie şi de viteză, decît prin masă. Aceasta înseamnă că expresia $\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{p} - \frac{E}{m}\delta t$ din (9) este aceeaşi pentru orice punct material.

Observaţia de mai sus se concretizează în următorul

POSTULAT. Raportul $\frac{E}{m}$ este o constantă universală. Acest raport avînd omogenitatea pătratului unei viteze, punem

$$\frac{E}{m} = \varepsilon\omega^2, \tag{10}$$

cu $\varepsilon = \pm 1$. Prin urmare

$$E = \varepsilon m\omega^2. \tag{11}$$

5. *Dependenţa masei de viteză.* Avem aşadar, în conformitate cu forma a doua a principiului care dă legea de mişcare,

$$D\omega_\delta = 0$$

sau, ţinînd seamă de (3) şi de (7),

$$\mathbf{p}\delta\mathbf{p} = E'(\alpha)\mathbf{p}\delta\mathbf{p} = E'(\alpha)\delta\alpha = \delta E(\alpha)$$

sau încă, folosind (8) şi (11),

$$\mathbf{p}\delta\mathbf{p} = \varepsilon\omega^2 m\,\delta m,$$

de unde

$$\delta(\mathbf{p}^2 - \varepsilon\omega^2 m^2) = 0.$$

De aici deducem că

$$\mathbf{p}^2 - \varepsilon\omega^2 m^2 = -\varepsilon\omega^2 m_0^2, \tag{12}$$

unde notăm cu $m_0$ masa care corespunde valorii $\mathbf{p}_0 = 0$ a impulsului, deci — conform cu (8) — vitezei $\mathbf{v}_0 = 0$; $m_0$ este, prin urmare, masa de repaus.

Din (12) se obţine mai întîi expresia

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{\varepsilon}{\omega^2}p^2}. \tag{13}$$

Înlocuind în (12) **p** cu $m\mathbf{v}$, găsim expresia masei în funcţie de viteză

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\varepsilon\frac{v^2}{\omega^2}}}. \tag{14}$$

Avem deci două posibilităţi de examinat:
Alegem* $\varepsilon = +1$. În acest caz relaţia (14) devine

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{\omega^2}}}, \tag{15}$$

$\omega$ apărînd în această expresie ca o viteză limită. Experienţa ne indică pentru această viteză limită valoarea $c$, viteza luminii în vid. Sîntem deci conduşi să punem $\omega = c$ pentru a ne conforma indicaţiilor experienţei. Se obţine atunci expresia

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{16}$$

care corespunde formulei de dependenţă a masei de viteză, găsită de Lorentz şi Einstein pe altă cale.

Cu această valoare a lui $\varepsilon$ şi cu valoarea necesară respectivă $\omega = c$, formula (13) devine

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{1}{c^2}\mathbf{p}^2}. \tag{17}$$

În acest caz, folosind (11) şi (1), găsim

$$E = E(\alpha) = mc^2 = c^2\sqrt{m_0^2 + \frac{1}{c^2}\mathbf{p}^2}.$$

Expresia energiei este deci $mc^2$ şi în acelaşi timp verificăm că

$$E'(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{m_0^2 + \frac{1}{c^2}\mathbf{p}^2}} \neq 0. \tag{18}$$

* Cealaltă alegere, $\varepsilon = -1$, va fi examinată sub titlul *Universuri antieinsteiniene*.

Alegerea $\varepsilon = +1$ și $\omega = c$ este impusă de experiență, ea *pune în evidență o caracteristică structurală a materiei în mișcare în spațiu, deci o relație între materie, spațiu și timp.*

Teoria dezvoltată aici merge așadar în adîncul fenomenalității mecanice; ea arată că inerția materiei este intim legată de structura spațiului și a timpului, care se consideră îndeobște numai sub aspect geometric.

6. *Legea mișcării inerțiale.* Deoarece $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, după cum reiese din (15) ca și din (17), rezultă $m \neq 0$ dacă $m_0 \neq 0$, iar ecuațiile (7) arată că $\mathbf{v}$ este constant în timpul mișcării. Mișcarea este deci rectilinie și uniformă. Energia punctului material, de asemenea constantă, are valoarea $mc^2 = m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0\mathbf{v}^2 + \frac{\theta}{1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2}}$, unde $0 < |\theta| < 1$, deci termenul predominant este energia internă $m_0c^2$ asociată materiei reprezentată de masa de repaus $m_0$.

## § 2. Universul Minkowski-Einstein

1. *Metrica.* Forma obținută pentru $\omega_\delta$ în urma alegerii $\varepsilon = 1$, $\omega = c$ devine

$$\omega_\delta^{(i)} = m(\mathbf{v}\delta\boldsymbol{\rho} - c^2\delta t). \tag{19}$$

Vectorul impuls-energie este $(m\mathbf{v}, mc^2)$, cu $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Lăsînd în factor masa, expresia formei fundamentale inerțiale se mai poate scrie

$$\omega_\delta^{(i)} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\delta\boldsymbol{\rho} - c^2\mathrm{d}t\delta t}{\mathrm{d}t} \tag{20}$$

și pune în evidență forma biliniară

$$\varphi = \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}\cdot\delta\boldsymbol{\rho} - c^2\mathrm{d}t\delta t, \tag{21}$$

invariantă, împreună cu forma pătratică

$$\mathrm{d}\sigma^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x_1^2 - \mathrm{d}x_2^2 - \mathrm{d}x_3^2, \tag{22}$$

pentru grupul continuu de transformări liniare cu zece parametri al lui Lorentz-Poincaré.

Se observă că

$$m = \frac{m_0\mathrm{d}t}{\sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}^2}} = \frac{m_0\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\sigma},$$

deci

$$m/\mathrm{d}t = m_0/\mathrm{d}\sigma. \tag{23}$$

Prin urmare, odată cu invarianţa formei $d\sigma^2$ şi deci şi a formei biliniare respective $c^2dt\delta t - d\rho\delta\rho$, relaţia (20), care se mai poate scrie

$$\omega_\delta^{(i)} = -m_0 \frac{c^2 dt\delta t - d\rho\delta\rho}{d\sigma}, \tag{24}$$

arată că şi forma $\omega_\delta^{(i)}$ este invariantă pentru grupul Lorentz-Poincaré.

Expresia $c^2dt\delta t - d\rho\delta\rho$ este un cvasiprodus scalar pentru cvasimetrica

$$c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Spaţiul cu patru dimensiuni $x_1$, $x_2$, $x_3$, $t$, dacă este dotat cu metrica de mai sus, este de tipul Minkowski-Einstein. Mişcările $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$, $dt$ pornind de la punctul $x_1$, $x_2$, $x_3$, $t$ corespund mişcărilor reale dacă

$$c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 > 0. \tag{25}$$

Mişcările pentru care

$$c^2dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = 0, \tag{26}$$

deci cu viteza luminii, nu sînt realizate în mod necesar de puncte materiale; pentru punctele materiale ele sînt doar mişcări limită.

Varietatea

$$c^2\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0, \tag{27}$$

în care $\xi_0$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ sînt parametrii direcţiei mişcării, pentru care deci $\frac{dt}{\xi_0} = \frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \frac{dx_3}{\xi_3}$ este un hipercon cu vîrful în punctul $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ în spaţiul cu patru dimensiuni $\xi_0$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$; el separă acest spaţiu în domenii, din care cel interior este al universului mişcărilor şi este caracterizat de inegalitatea

$$c^2\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 > 0. \tag{28}$$

Punctul $(t, x_1, x_2, x_3)$ în mişcare îşi poartă cu el conul separator al universului mişcărilor.

2. *Transformările Lorentz.* Transformările liniare care lasă invariantă forma $c^2\xi_0^2 - \xi_1^2$ şi pentru care $\xi_2 = \xi_2^0$, $\xi_3 = \xi_3^0$ au fost valorificate de Lorentz. Aceste transformări au expresia

$$\xi_0' = \alpha\xi_0 + \beta\xi_1, \tag{29}$$

$$\xi_1' = \gamma\xi_0 + \delta\xi_1.$$

Coeficienţii acestei transformări verifică identitatea

$$c^2\xi_0'^2 - \xi_1'^2 = c^2\xi_0^2 - \xi_1^2. \tag{30}$$

Vom avea atunci un argument $\varphi$ pentru care

$$\alpha = \operatorname{ch}\varphi, \quad \beta = -\frac{1}{c}\operatorname{sh}\varphi,$$

$$\gamma = -c\operatorname{sh}\varphi, \quad \delta = \operatorname{ch}\varphi.$$

Dacă punem

$$u = -c\frac{\operatorname{sh}\varphi}{\operatorname{ch}\varphi},$$

rezultă transformările lui Lorentz:

$$\xi_0' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(\xi_0 + \frac{u}{c^2}\xi_1\right), \quad \xi_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(\xi_1 + u\xi_0), \tag{31}$$

care formează un grup continuu cu un parametru, de unde

$$\frac{\xi_1'}{\xi_0'} = \frac{\frac{\xi_1}{\xi_0} + u}{1 + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\xi_1}{\xi_0}u}. \tag{32}$$

Întrucît $\xi_0$ și $\xi_1$ sînt valori proporționale cu $dt$ și $dx_1$, rezultă, din (32), dacă punem

$$\frac{\xi_1}{\xi_0} = \frac{dx_1}{dt} = v, \quad \frac{\xi_1'}{\xi_0'} = \frac{dx_1'}{dt'} = v',$$

și interpretăm pe $u$ ca viteză, legea einsteiniană de compunere a vitezelor

$$v' = \frac{v+u}{1+\frac{vu}{c^2}}. \tag{33}$$

Din această lege rezultă că, dacă $v \leqq c$, $u \leqq c$, avem și pentru viteza compusă inegalitatea

$$v' \leqq c.$$

Semnul egalității este valabil numai dacă una dintre vitezele $v$ sau $u$ este egală cu $c$.

În adevăr din (33) rezultă

$$\frac{v}{c} + \frac{u}{c} < 1 + \frac{v}{c}\frac{u}{c},$$

deoarece această inegalitate este echivalentă inegalităţii evidente

$$\frac{v}{c}\left(1-\frac{u}{c}\right)<1-\frac{u}{c},$$

în ipoteza $v<c$, $u<c$. Dacă $v=c$ sau $u=c$ avem egalitate.

## § 3. Fotonul şi unda asociată mişcării punctului material

1. *Unda asociată mişcării fotonului.* Cînd masa de repaus $m_0$ a punctului material capătă valoarea zero, sîntem în condiţiile de limită ale teoriei precedente, mişcarea încetează a avea un sens dacă este interpretată exact în cadrul precedent. Ea păstrează însă un înţeles în interpretarea ondulatorie prin intermediul ecuaţiei lui Jacobi, a cărei integrală completă conduce la legea mişcării.

Obiectul mişcării care ajunge la viteza egală cu a luminii poate păstra încă o masă dinamică $m$ finită, dacă are o masă de repaus $m_0=0$. În adevăr din relaţiile fundamentale

$$E=mc^2,\quad \mathbf{p}=m\mathbf{v},\quad m=\sqrt{m_0^2+\frac{1}{c^2}\mathbf{p}^2}$$

obţinem, din primele două,

$$\mathbf{p}=E\frac{\mathbf{v}}{c^2},$$

de unde, presupunînd $v=c$, rezultă

$$p=\frac{E}{c}. \tag{1}$$

Din ultima relaţie, făcînd $m_0=0$, rezultă $m=\frac{p}{c}$. (2)

Expresia energiei este aşadar

$$E=pc=c\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2},$$

iar teorema lui Jacobi ne dă ecuaţia

$$c\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)^2}=\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

sau încă, sub formă întreagă

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2=0. \tag{3}$$

Aceasta este ecuaţia caracteristicilor ecuaţiei cu derivate parţiale

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0, \tag{4}$$

ale cărei unde elementare se propagă cu viteza luminii.

Să considerăm undele plane ale ecuaţiei (4). Faza unei atare unde de lungime de undă $\lambda$ şi de frecvenţă $\nu$ este dată de expresia

$$q=\frac{\alpha_1}{\lambda}x_1+\frac{\alpha_2}{\lambda}x_2+\frac{\alpha_3}{\lambda}x_3-\nu t, \tag{5}$$

care trebuie să fie invariantă pentru acelaşi grup Lorentz-Poincaré de invarianţi ai ecuaţiei (4) şi ai mişcării, deci ai formei fundamentale

$$\omega_\delta=m\dot{x}_1\delta x_1+m\dot{x}_2\delta x_2+m\dot{x}_3\delta x_3-E\delta t. \tag{6}$$

Cele două forme $q$ şi $\omega_\delta$ trebuie deci să fie identice, în afară de un factor $h$, constantă universală:

$$\frac{m\dot{x}_1}{\alpha_1/\lambda}=\frac{m\dot{x}_2}{\alpha_2/\lambda}=\frac{m\dot{x}_3}{\alpha_3/\lambda}=\frac{E}{\nu}=h. \tag{7}$$

Ultima egalitate din acest sistem se poate încă scrie

$$E=h\nu$$

şi reprezintă expresia cuantică a energiei, multiplu de frecvenţa $\nu$ reprezentat de constanta $h$ a lui Planck.

2. *Unda asociată punctului material în mişcare.* În acest caz $m_0\neq 0$ şi expresia energiei este

$$E=mc^2=c^2\sqrt{m_0^2+\frac{1}{c^2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)}=c\sqrt{m_0c^2+p_1^2+p_2^2+p_3^2}. \tag{8}$$

Ecuaţia lui Jacobi devine în acest caz

$$\sqrt{m_0^2c^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)^2}=\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t},$$

sau, sub formă întreagă,

$$m_0^2c^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = 0. \tag{9}$$

Să omogenizăm această ecuaţie cu ajutorul unei funcţii $\chi(\psi, t; x_1, x_2, x_3)$, care trebuie să fie nulă cînd $\psi$ verifică (9). Funcţia $\chi$ satisface atunci ecuaţia

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_3}\right)^2 + m_0^2c^2\left(\frac{\partial\chi}{\partial\psi}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2 = 0 \tag{10}$$

Căutăm pentru $\chi$ o expresie staţionară. În acest caz avem

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} = E\frac{\partial\chi}{\partial\psi} \tag{11}$$

şi deci ecuaţia (10) devine

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{v^2}{c^4}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

Ecuaţia respectivă a undelor este

$$\Delta\Phi - \frac{v^2}{c^4}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{12}$$

Viteza de propagare a undei corespunzătoare este

$$w = \frac{c^2}{v} \tag{13}$$

şi reprezintă relaţia lui de Broglie între cele două specii de viteze : cea corpusculară $v$ şi cea de undă $w$. Celelalte relaţii ale lui de Broglie rezultă din identificarea — asemeni celeia din cazul fotonului — între cei doi invarianţi

$$q = \frac{\alpha_1}{\lambda}\delta x_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda}\delta x_2 + \frac{\alpha_3}{\lambda}\delta x_3 - \nu\delta t$$

şi

$$\omega_\delta = p_1\delta x_1' + p_2\delta x_2' + p_3\delta x_3' - E\delta t,$$

unde

$$\delta x_1' = \frac{c^2}{v}\delta x_1, \qquad \delta x_2' = \frac{c^2}{v}\delta x_2, \qquad \delta x_3' = \frac{c^2}{v}\delta x_3.$$

Obţinem deci egalităţile

$$\frac{p_1c^2/v}{\alpha_1/\lambda} = \frac{p_2c^2/v}{\alpha_2/\lambda} = \frac{p_3c^2/v}{\alpha_3/\lambda} = \frac{E}{\nu} = h'.$$

Cum cei doi cvadrivectori $(p_1, p_2, p_3, E)$ şi $(\alpha_1/\lambda, \alpha_2/\lambda, \alpha_3/\lambda, \nu)$ au lungimea nulă, raportul $h'$ nu depinde de viteză, este deci neschimbat cînd $v = c$; avem deci $h' = h$. Avem, ca o consecinţă şi pentru punctul material relaţiile cuantice

$$E = h\nu; \quad \mathbf{p} = h\frac{v}{c^2}\mathbf{I},$$

unde $\mathbf{I}$ este frecvenţa vectorială a propagării.

## § 4. Mişcarea într-un cîmp

1. *Principii. Vectorul şi forma potenţială.* În această fază a construcţiei teoriei apare o deosebire între mecanica invariantivă şi mecanica lui Newton. În timp ce în mecanica lui Newton cîmpul este reprezentat de un potenţial scalar, mecanica invariantivă impune cîmpului forma unui potenţial vector, în corespondenţă cu cvadrivectorul cantitate de mişcare-energie al mişcării inerţiale.

Rezultatele obţinute mai înainte pentru mişcarea inerţială impun deci nu numai o structură formală pentru legea mişcării în prezenţa unui cîmp, dar şi o structură pentru cîmpul însuşi.

Fie deci un potenţial vector (cvadridimensional) $A_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $A_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $A_3(x_1, x_2, x_3, t)$, $A_0(x_1, x_2, x_3, t)$ funcţie de poziţia $\rho(x_1, x_2, x_3)$ şi de momentul $t$ în universul $S_N = E_3 \times T$ şi forma potenţială

$$\omega_8^{(p)} = A_1\delta x_1 + A_2\delta x_2 + A_3\delta x_3 - A_0\delta t, \tag{1}$$

care este un produs scalar, deci un invariant pentru transformările care lasă invariantă forma inerţială stabilită mai sus

$$\omega_8^{(i)} = m\dot{x}_1\delta x_1 + m\dot{x}_2\delta x_2 + m\dot{x}_3\delta x_3 - mc^2\delta t. \tag{2}$$

Legea mişcării este definită de următorul principiu:

PRINCIPIUL 2. *Derivata geometrică a vectorului impuls-energie este egală cu derivata geometrică a vectorului potenţial.*

Prin definiţie derivata geometrică sau Cartan a vectorului potenţial $(\mathbf{A}, A_0)$ are drept componente coeficienţii derivatei exterioare a formei potenţiale, pe care o mai scriem

$$\omega_8^{(p)} = \mathbf{A} \cdot \delta\boldsymbol{\rho} - A_0\delta t,$$

unde $\mathbf{A}$ este vectorul spaţial ale cărui componente sînt $A_1$, $A_2$, $A_3$. Pe această bază se poate da principiului 2 forma care îl apropie de aceea a lui d'Alembert în mecanica clasică:

PRINCIPIUL II. *Mişcarea reprezentată de operatorul diferenţial* d *este definită de egalitatea între derivata exterioară a formei inerţiale şi cea a formei potenţiale*:

$$D\omega_\delta^{(i)} = \mathrm{d}\omega_\delta^{(i)} - \delta\omega_\mathrm{d}^{(i)} = \mathrm{d}\omega_\delta^{(p)} - \delta\omega_\mathrm{d}^{(p)} = D\omega_\delta^{(p)}, \tag{3}$$

*pentru* $\delta$ *arbitrar.*

2. *Mărimi şi relaţii caracteristice ale cîmpului.* Fiind o operaţie geometrică, derivata exterioară a lui $\omega_\delta^{(p)}$ ne dă elemente cu caracter vectorial invariante la grupul Lorentz.

Avem, după cum se verifică imediat,

$$\begin{aligned} D\omega_\delta^{(p)} = {} & E_1(\mathrm{d}x_1\delta t - \mathrm{d}t\delta x_1) + E_2(\mathrm{d}x_2\delta t - \mathrm{d}t\delta x_2) + \\ & + E_3(\mathrm{d}x_3\delta t - \mathrm{d}t\,\delta x_3) + H_1(-\mathrm{d}x_3\delta x_2 + \mathrm{d}x_2\delta x_3) + \\ & + H_2(-\mathrm{d}x_1\delta x_3 + \mathrm{d}x_3\delta x_1) + H_3(-\mathrm{d}x_2\delta x_1 + \mathrm{d}x_1\delta x_2), \end{aligned} \tag{4}$$

vectorii $\mathbf{E}(E_1, E_2, E_3)$ şi $\mathbf{H}(H_1, H_2, H_3)$ fiind definiţi după cum urmează

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \tag{5}$$

Din relaţiile precedente, obţinem primul grup de relaţii caracteristice ale cîmpului

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă punem acum

$$a = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial A_0}{\partial t} \tag{7}$$

şi considerăm vectorul $\square\,\mathbf{A}$ cu patru componente

$$\square A_j = \Delta A_j - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2};\ j = 1, 2, 3, 0, \tag{8}$$

rezultă că grad $a - \square\mathbf{A}$ este un vector cu patru componente al spaţiului lui Minkowski.

Cele trei componente spaţiale sînt ale vectorului

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{grad} a - \square\mathbf{A}, \tag{9}$$

iar componenta temporală este

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial a}{\partial t} + \Box A_0. \tag{10}$$

Ecuaţiile cîmpului staţionar se obţin punînd

$$a = 0 \tag{11}$$

şi

$$\Box \mathbf{A} = 0, \tag{12}$$

după ce am înlocuit vectorul tridimensional $\mathbf{A}$ cu vectorul $\frac{e}{c}\mathbf{A}$, unde $e$ reprezintă o sarcină elementară şi $eA_0$ este pus în locul lui $A_0$.

Din (11) şi (12) rezultă al doilea grup de ecuaţii ale cîmpului

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Potenţialele $\mathbf{A}$ şi $A_0$, care verifică ecuaţiile de propagare de undă (8), constituie deci baza construcţiei cîmpului maxwellian staţionar, dacă identificăm pe $\mathbf{E}$ cu un cîmp electric şi pe $\mathbf{H}$ cu un cîmp magnetic.

În cazul cîmpurilor nestaţionare, condiţiile

$$a = 0, \quad \Box \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{k}, \quad \Box A_0 = -4\pi\theta, \tag{14}$$

$\mathbf{k}$ fiind un vector al cîmpului şi $\theta$ un scalar, conduc la ecuaţiile

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi \mathbf{k}, \tag{15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\theta.$$

3. *Ecuaţia mişcării.* Ecuaţia mişcării rezultă atunci din aplicarea principiului al doilea.

Dat fiind că

$$D\omega_\delta^{(i)} = \mathbf{d}\pi\delta\rho - \mathbf{d}(mc^2)\,\delta t$$

şi

$$D\omega_\delta^{(p)} = -(\mathbf{E}\mathrm{d}t + \mathrm{d}\rho \times \mathbf{H})\,\delta\rho + \mathbf{E}\mathrm{d}\rho\,\delta t,$$

aplicînd principiul 2, rezultă ecuaţia vectorială a mişcării

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}}{\mathrm{d}t} = -(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{H}), \tag{16}$$

iar din bilanţul energiei, obţinut cu ajutorul egalităţii între coeficienţii lui $\delta t$ din cei doi membri, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{E}\,\mathbf{v} = -(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{H})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}}{\mathrm{d}t}, \tag{17}$$

care este satisfăcută identic dacă $\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v}$ şi $m = m_0/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

4. *Ecuaţia Jacobi a mişcării.* Pentru a regăsi aceleaşi condiţii în care a fost aplicată metoda lui Hamilton-Jacobi, punem

$$\pi_j = p_j - \frac{e}{c} A_j, \quad j = 1,\ 2,\ 3 \tag{18}$$

şi

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + \pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2} + eW. \tag{19}$$

În expresia lui $E$ substituim valorile $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$ cu cele date (18); din (19) se obţine atunci

$$E = c\sqrt{m_0^2c^2 + \sum_j \left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)^2} + eW. \tag{20}$$

Ecuaţia lui Jacobi devine

$$c\sqrt{m_0^2c^2 + \sum_j \left(p_j - \frac{e}{c}A_j\right)^2} + eW = -\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Efectuăm operaţia de omogenizare introducînd o funcţie $\chi(\Phi, t, x, y, z) = 0$, care ne dă

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = -\frac{\partial\chi}{\partial t} \Big/ \frac{\partial\chi}{\partial\Phi};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\chi}{\partial x} \Big/ \frac{\partial\chi}{\partial\Phi} \text{ etc.}$$

Rezultă ecuaţia

$$\sum\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2 + \frac{e^2}{c^2}\left(\sum_j A_j^2 - \frac{W^2}{c^2} + m_0^2c^2\right)\left(\frac{\partial\chi}{\partial\Phi}\right)^2 -$$

$$- 2\frac{e}{c}\left(\sum_j A_j\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{1}{c^2}W\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)\frac{\partial\chi}{\partial\Phi} = 0.$$

Considerînd că $\Phi$ este staționară, deci

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \mathrm{E} \frac{\partial \chi}{\partial \Phi},$$

din ecuația precedentă obținem

$$\sum \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left[\frac{e^2}{c^2} \sum_j A_j^2 - m^2 v^2\right] \left(\frac{\partial \chi}{\partial \Phi}\right)^2 - \\ - 2 \frac{e}{c} \left( \sum A_j \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) \frac{\partial \chi}{\partial \Phi}\right) = 0,$$

care este ecuația caracteristicilor ecuației undelor

$$\Delta \varphi + \left[\frac{e^2}{c^2} \left(\sum_j A_j^2\right) - m^2 v^2\right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Phi^2} - 2 \frac{e}{c} \sum A_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \Phi} = 0.$$

Coeficienții unei soluții de forma

$$\varphi = C \cos 2\pi\lambda\Phi + D \sin 2\pi\lambda\Phi$$

verifică ecuația

$$\Delta S - 4\pi\lambda^2 \left[\frac{e^2}{c^2} \sum A_j^2 - m^2 v^2\right] S - 4\pi i\lambda \frac{e}{c} \sum_j A_j \frac{\partial S}{\partial x} = 0.$$

Cuantificarea efectivă a unei astfel de ecuații de tip Schrödinger depășește programul nostru.

Trebuie doar să reținem că metodele folosite în mecanica invariantivă au condus nemijlocit pînă la ecuația Schrödinger.

### Ordinul de valabilitate al mecanicii clasice

Este suficient să presupunem că vectorul spațial **A** satisface condițiilor

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{A} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0,$$

pentru ca ecuația mișcării să devină

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\, A_0$$

în tot timpul mișcării care nu mai are cîmp **H**, întocmai după normele Mecanicii clasice într-un cîmp derivînd dintr-un potențial.

5. *Cazul general. Ecuațiile mișcării.* În mecanica newtoniană cazul general este al cîmpurilor de forță care nu derivă cu necesitate dintr-un

potenţial. În acest caz apare ca mărime primară care ia locul potenţialului, sau mai exact variaţiei sale, lucrul mecanic reprezentat de expresia

$$X_1 \mathrm{d}x_1 + X_2 \mathrm{d}x_2 + X_3 \mathrm{d}x_3,$$

care nu mai este cu necesitate o diferenţială exactă, cum este dacă sîntem în prezenţa unui potenţial.

În mecanica invariantivă, ca şi în cea clasică dealtfel, potenţialii $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_0$ nu intervin direct, ci prin variaţiile lor

$$\mathrm{d}A_j = A_{j1}\,\mathrm{d}x^1 + A_{j2}\,\mathrm{d}x^2 + A_{j3}\,\mathrm{d}x^3 + A_{j0}\,\mathrm{d}t,$$

$$j = 1,\ 2,\ 3,\ 0.$$

Şi dacă există şi dacă nu există potenţiali, *legea mişcării rezultă din egalizarea expresiei* $D\omega_8^{(i)}$ *cu expresia*

$$D\omega_8^{(p)} = \sum_{j=1,2,3} \sum_{k=1,2,3,0} A_{jk}\,\mathrm{d}x^k\ \delta x^j - \sum_{j=1,2,3} \sum_{k=1,2,3,0} A_{jk}\,\mathrm{d}x^j\ \delta x^k +$$

$$+ \sum_{k=1,2,3,0} A_{0k}\ \mathrm{d}t\delta x^k - \sum_{k=1,2,3,0} A_{0k}\,\mathrm{d}x^k\delta t = \sum_{j=1,2,3} \Big(\sum_{k=1,2,3} (A_{jk} - A_{kj})\ \mathrm{d}x^k +$$

$$+ (A_{j0} + A_{0j})\mathrm{d}t\Big)\delta x^j - \Big(\sum_{j=1,2,3} (A_{0j} + A_{j0})\,\mathrm{d}x^j\Big)\ \delta t,$$

pentru orice $\delta x^1$, $\delta x^2$, $\delta x^3$, $\delta t$.
Deoarece, ţinînd seamă de valoarea găsită pentru impulsuri, avem

$$D\omega_8^{(i)} = \sum_{j=1,2,3} \mathrm{d}p_j \delta x^j - \mathrm{d}H\delta t, \quad \text{cu} \quad H = mc^2,$$

ecuaţiile mişcării iau forma

$$\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1,2,3} (A_{jk} - A_{kj})\,\dot{x}^k + A_{j0} + A_{0j},$$

$$j = 1,\ 2,\ 3$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{c^2} \sum_{j=1,2,3} (A_{j0} + A_{0j})\ \dot{x}^j.$$

Locul forţei din mecanica clasică este luat în mecanica invariantivă de tensorul $A_{jk}(j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ cu 16 componente. Singura limitare ar putea veni de la condiţia de compatibilitate a acestor 4 ecuaţii, ţinînd seama că $p_j = m\dot{x}_j$. Se constată însă imediat fiindcă această condiţie este identic verificată, dată fiind expresia lorentziană a masei.

Rezultă că nu avem nici o limitaţie apriori pentru valorile tensorului cu 16 componente $A_{jk}$.

Dacă partea spaţială a tensorului este *simetrică*, adică

$$A_{jk} = A_{kj};\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$$

şi dacă componentele temporale $A_{j0}$ sînt nule, atunci ecuaţiile mişcării devin asemenea celor newtoniene:

$$\dot{p}_j = A_{0j},\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

## § 5. Universuri antiminkowskiene

1. *Generalităţi. Despre alternativa* $\varepsilon = \pm 1$. Interpretarea de fibră ce poate fi dată spaţiului Einstein-Minkowski face mai accesibilă ideea altor forme de fibră pe care teoria mecanică expusă în primele paragrafe ale acestui capitol o impune ca pe o *obligo matematic*.

În adevăr, dezvoltînd procesul axiomatic al mecanicii mişcării inerţiale, după ce am afirmat în primul postulat că raportul $F/m$ reprezintă o constantă universală, ceea ce conduce la a pune $F = \varepsilon m\omega^2$, ne mai rămîne să hotărîm dacă $\varepsilon$ este egal cu $+1$ sau cu $-1$. Postulatul al doilea, pe care l-am numit postulatul Einstein-Minkowski, a ales valoarea $\varepsilon = +1$, în conformitate cu experienţa curentă, în care încă nu au fost întîlnite viteze mai mari decît viteza luminii, în care deci vitezele sînt mărginite.

A doua posibilitate, reprezentată de $\varepsilon = -1$, nu poate fi, în principiu, exclusă, din considerente empirice, întrucît nu pot fi excluse tipuri eventuale de experienţe, forme de materie şi cîmpuri fizice în care vitezele să poată atinge valori arbitrar de mari şi $\omega$ care reprezintă constanta universală a primului postulat să aibă o altă interpretare decît aceea de viteză limită. Nu este prima oară cînd o teorie matematică conduce la o astfel de situaţie. O situaţie similară s-a produs în teoria lui Dirac, care a deschis calea cercetărilor asupra existenţei pozitronului.

Apare deci pentru noi obligaţia de a considera şi cazul $\varepsilon = -1$, împreună cu toate consecinţele teoretice ale mecanicii respective.

2. *Mecanica inerţială a postulatului* $\varepsilon = -1$. În acest caz, se impun expresiile

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 + v^2/\omega^2}}\ ;\ F = -m\omega^2; \tag{1}$$

şi nu cunoaştem nici un fapt, nici de ordin experimental nici de ordin principial, care să indice valori preferenţiale pentru $\omega$. În schimb, expresia lui $m$, care se mai poate scrie

$$m = \sqrt{m_0^2 - \frac{1}{\omega^2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)},$$

descreşte cînd viteza creşte, masa de repaus fiind masa sa cea mai mare,

$$m \leqq m_0. \tag{2}$$

Denumim aceste mase inerțiale, deocamdată cu existență pur matematică, și care se comportă în conformitate cu prima dintre relațiile (1), ca antimase de specie $\omega$.

Universul-fibră patrudimensional asociat unei astfel de mase derivă evident din forma

$$\omega_8^{(i)} = \sum_{j=1,2,3} p_j \, \delta x_j + m \, \omega^2 \delta t, \tag{3}$$

deci corespunde formei pătratice euclidiene

$$d\theta^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 + \omega^2 \mathrm{d}t^2 \tag{4}$$

și poate fi denumit antieinsteinian.

Este evident că fibrele antieinsteiniene, posedînd o structură de spațiu euclidian, sînt mai simple din punct de vedere geometric. În ele nu există mișcări pe drumuri de lungime nulă, ca în cazul fibrelor Einstein, în care este posibil să avem

$$\mathrm{d}\sigma^2 = c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x_1^2 - \mathrm{d}x_2^2 - \mathrm{d}x_3^2 = 0$$

pentru mișcarea unui foton de viteză egală cu $c$ și, în plus, nu există regiuni interzise pentru mișcare, ca în fibra Einstein.

Fibrele antieinsteiniene sînt universuri euclidiene omogene, diferențiate între ele după valorile lui $\omega$, ceea ce introduce și oarecare deosebire între aceste spații cu condiția, totuși, ca unitatea de măsură a timpului să fie fizic definită.

3. *Cîmp antimaxwellian.* Structura lui $\omega_8^{(i)}$ a impus o formă obligatorie ecuațiilor de structură ale potențialelor $\widetilde{A}(P)$ ale cîmpului.

Aceste potențiale au fost obligate, în cazul staționar, să verifice o ecuație de tip hiperbolic

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

care este, în esență, o ecuație de propagare specifică a cîmpului maxwellian.

În cazul cîmpului variabil, ecuațiile pe care trebuie să le verifice potențialele $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$, $A_0$ sînt de forma

$$\Delta \mathbf{U} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = 4\pi \mathbf{k}, \tag{6}$$

$$\Delta U_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} = 4\pi\theta,$$

unde $\mathbf{U}$ este vectorul $A_1, A_2, A_3$, $U_0$ corespunde lui $A_0$, $\mathbf{k}$ este un vector timp și $\theta$ un scalar.

Dacă mișcarea inerțială derivă din forma antieinsteiniană și aparține unei fibre de metrică $\varepsilon = -1$, atunci cele patru potențiale ale cîm-

pului verifică, în cazul staţionar, ecuaţiile

$$\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} + \frac{1}{\omega}\frac{\partial A_0}{\partial t} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 A_j}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 A_j}{\partial t^2} = 0, \quad j = 1, 2, 3, 0 \tag{8}$$

şi cele două cîmpuri $\mathbf{E}_\omega$ şi $\mathbf{H}_\omega$ definite în $E_3$ de relaţiile

$$\mathbf{E}_\omega = \operatorname{grad} A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{H}_\omega = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

($\mathbf{A}$ este vectorul $A_1$, $A_2$, $A_3$)
verifică cele două grupuri de ecuaţii antimaxwelliene

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_\omega + \frac{\partial \mathbf{H}_\omega}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_\omega = 0$$

şi

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_\omega - \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial \mathbf{E}_\omega}{\partial t} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_\omega = 0,$$

primul grup fiind identic cu cel maxwellian, cel de-al doilea esenţial diferit.

Deosebirea esenţială dintre cele două cîmpuri este vădită pe forma (8). În timp ce ecuaţia (5) corespunde unui proces de propagare în fibra lui Einstein, ecuaţiile (8) corespund unui alt tip de fenomen fizic, vom spune un fenomen de tensiune interioară globală.

Şi în acest caz se poate construi un cîmp variabil, prin introducerea unui vector $\tilde{k}(\mathbf{k}, k_0)$ în spaţiul cu 4 dimensiuni, cerînd potenţialelor $\tilde{A}$ să verifice ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial x_3^2} + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial t^2} = -4\pi\tilde{k} \cdot \tag{9}$$

*Concluzii şi probleme.* Interpretările posibile în termeni fenomenologici ale modelului precedent de univers sînt variate. Nu există nimic contrar admiterii unei materii a cărei comportare să fie conformă formulelor (1) şi (2) şi nici a unui cîmp sau cîmpuri de tipul (8), (9), (10), cu eventualitatea unei sarcini respective care să corespundă sarcinii electrice în cîmpul maxwellian.

Rămîne să se examineze dacă vreo antiparticulă se comportă în modul indicat de aceste formule.

## Capitolul II

# MIȘCAREA CORPUSCULELOR STABILE*

*Introducere.* Mișcarea unui sistem rigid, spune T. Levi-Civita în cinematica sa, se extinde în mod firesc la întreg spațiul și se studiază fără a se specifica sistemul particular considerat pentru a o defini. Este o mișcare cu șase grade de libertate. Viteza unui punct generic $P$ al spațiului rigid în mișcare este dată de expresia $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, unde $\mathbf{v}_0$ este viteza unui punct $O$ al sistemului, $\boldsymbol{\omega}$ este viteza unghiulară comună tuturor punctelor spațiului și $\mathbf{r}$ este vectorul $OP$. Este evident că $\mathbf{v}_P$ crește indefinit cu distanța $\mathbf{r}$, în contradicție cu principiul fizicii actuale, potrivit căruia există o viteză maximă.

Conceptul de sistem rigid fără limite în spațiu nu poate fi deci transpus în mecanica invariantivă. Întinderea în spațiu a sistemelor trebuie, în mod necesar, să intervină în definiția oricărui sistem material în mișcare, cu atît mai mult cu cît sistemul va fi caracterizat cu ajutorul momentelor de inerție. În calculul momentelor respective intervine repartiția masei care, depinzînd de viteză, nu trebuie să prezinte variații importante provenite din diferențele de viteză, deci de întinderea corpului.

Corpurile pe care le putem trata ca rigide sînt, deci, de întindere mărginită și, întrucît pentru dimensiunile curente și vitezele curente mecanica invariantivă trebuie redusă la mecanica lui Newton, interesul nostru se îndreaptă deocamdată spre corpuscule, ale căror dimensiuni, într-un anume sens mici, fac posibilă o teorie care se dovedește totuși destul de diferită de teoria lui Newton.

## § 1. Mișcarea inerțială

1. *Invarianții euclidieni.* Poziția corpului în spațiul reprezentativ euclidian tridimensional este definită de un punct $P(x_1, x_2, x_3)$, care poate fi centrul de masă al corpului, și de trei unghiuri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Mărimile dinamice pe care trebuie să le asociem poziției $P$ și unghiurilor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se pun în evidență în modul următor, obținut ca rezultat

---

* Denumirea pe care o dăm corpurilor, care în mecanica invariantivă joacă rolul solidului rigid, este provizorie, așteptînd una mai bună. Corpusculele pe care le avem în vedere pot fi rigide obișnuite, după cum pot fi planete, dacă împlinesc condițiile ce le vor fi prescrise la punctul 3 al paragrafului 1.

al calculului de construcţie a formei inerţiale $\Omega_\delta^{(i)}$ a corpului respectiv. Partea spaţială a formei $\Omega_\delta^{(i)}$, pe care o notăm cu $\pi_\delta$, este reprezentată de integrala

$$\pi_\delta = \int_C (\dot{\xi}_1 \delta\xi_1 + \dot{\xi}_2 \delta\xi_2 + \dot{\xi}_3 \delta\xi_3)\, \mathrm{d}m, \tag{1}$$

care este integrala părţii spaţiale a formei

$$\omega_\delta^{(i)} = \sum_j^{1,2,3} \dot{\xi}_j \delta\xi_j - h\delta t$$

relativă la părţile elementare ale corpului $C$.

Vectorul $\delta\boldsymbol{\xi}(\delta\xi_1, \delta\xi_2, \delta\xi_3)$ corespunde unei deplasări rigide a sistemului, deci

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \delta\mathbf{x} + \mathbf{r} \times \delta\boldsymbol{\alpha}, \tag{2}$$

cu $\mathbf{r} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}$ de componente $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$.

Aceasta pune în evidenţă unghiurile $\delta\boldsymbol{\alpha}(\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \delta\alpha_3)$ care, împreună cu $x_1$, $x_2$, $x_3$, caracterizează mişcarea.

Folosind aceste expresii şi pentru $\delta = \mathrm{d}$ în (1), obţinem

$$\pi_\delta = m \sum_j^{1,2,3} x_j \delta x_j + [(l_{22} + l_{33})\, \dot{\alpha}_1 - l_{12}\dot{\alpha}_2 + l_{13}\dot{\alpha}_3]\, \delta\alpha_1 +$$

$$+ [(l_{33} + l_{11})\, \dot{\alpha}_2 - l_{23}\dot{\alpha}_3 + l_{21}\dot{\alpha}_1]\, \delta\alpha_2 + [(l_{11} + l_{22})\, \dot{\alpha}_3 - l_{31}\dot{\alpha}_1 + l_{32}\dot{\alpha}_2]\, \delta\alpha_3,$$

unde

$$m = \int_C \mathrm{d}m \tag{5}$$

este masa totală a corpului, iar

$$l_{jk} = \int_C \zeta_j \zeta_k\, \mathrm{d}m$$

sînt momentele de ordinul al doilea ale distribuţiei de masă a corpului, considerînd că $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$, sînt componentele lui $\mathbf{r} = OP$ într-un sistem de axe legate rigid* de $C$; $l_{jk}$ sînt deci valori care depind de corp şi nu de poziţie. Expresiile

$$\begin{aligned} \theta_1 &= (l_{22} + l_{33})\, \dot{\alpha}_1 - l_{12}\dot{\alpha}_2 + l_{13}\dot{\alpha}_3, \\ \theta_2 &= l_{21}\dot{\alpha}_1 + (l_{33} + l_{11})\, \dot{\alpha}_2 - l_{23}\dot{\alpha}_3, \\ \theta_3 &= -l_{31}\dot{\alpha}_1 + l_{32}\dot{\alpha}_2 + (l_{11} + l_{22})\, \dot{\alpha}_3, \end{aligned} \tag{6}$$

* Această afirmaţie trebuie înţeleasă în sensul aproximativ şi convenţional conform cu structura pe care o atribuim corpului.

sînt impulsurile unghiulare în mişcare, astfel că forma inerţială a corpului poate fi scrisă

$$\Omega_{\delta}^{(i)} = \sum_{j}^{1,2,3} m\dot{x}_j \delta x_j + \sum_{j}^{1,2,3} \theta_j \delta \alpha_j - H\delta t, \tag{7}$$

unde mai rămîne de precizat dependenţa lui $m$ şi a lui $\theta$ de celelalte elemente ale mişcării şi expresia lui $H$. În acest scop este necesar să se precizeze care sînt invarianţii euclidieni ai mişcării, cu excepţia lui $\alpha = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$, cu $p_j = m\dot{x}_j$, şi a lui $\frac{1}{2}\theta_j^2 (j = 1, 2, 3)$, care se impun de la sine.

Obţinem invarianţii căutaţi dacă, în primul rînd, inversăm relaţiile (6). Rezultă

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \varkappa_1\theta_1 - \lambda_3\theta_2 + \lambda_2\theta_3, \\ \dot{\alpha}_2 &= \lambda_3\theta_1 + \varkappa_2\theta_2 - \lambda_1\theta_3, \\ \dot{\alpha}_3 &= -\lambda_2\theta_1 + \lambda_1\theta_2 + \varkappa_3\theta_3, \end{aligned} \tag{8}$$

unde $\varkappa_j (j = 1, 2, 3,)$ şi $\lambda_j (j = 1, 2, 3)$ sînt expresii raţionale de $l_{jk}$.

Este evident că sînt luate în considerare numai sistemele compatibile, pentru care inversarea este posibilă.

Din (8) rezultă imediat expresia cu caracter geometric invariant

$$\dot{\alpha}_1\delta\theta_1 + \dot{\alpha}_2\delta\theta_2 + \dot{\alpha}_3\delta\theta_3 = \sum_{j}^{1,2,3} \varkappa_j \delta\left(\frac{1}{2}\theta_j^2\right) + \lambda_1(\theta_2\delta\theta_3 - \theta_3\delta\theta_2) +$$

$$+ \lambda_2(\theta_3\delta\theta_1 - \theta_1\delta\theta_3) + \lambda_3(\theta_1\delta\theta_2 - \theta_2\delta\theta_1), \tag{9}$$

care pune în evidenţă, pe lîngă invariaţii

$$\omega_j = \frac{1}{2}\theta_j^2, \tag{10}$$

şi trei invarianţi anolonomi definiţi de expresiile

$$\begin{aligned} \delta\varphi_1 &= \theta_2\delta\theta_3 - \theta_3\delta\theta_2, \quad \delta\varphi_2 = \theta_3\delta\theta_1 - \theta_1\delta\theta_3, \\ \delta\varphi_3 &= \theta_1\delta\theta_2 - \theta_2\delta\theta_1. \end{aligned} \tag{11}$$

Funcţia de stare $H$ este, în principiu, o funcţie de invarianţii euclidieni ai sistemului,

$$H = H(\alpha;\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3;\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3),$$

care intervine prin intermediul lui $\mathrm{d}H$ sau $\delta H$, care pot fi scrise efectiv.

2. *Legea mişcării.* Legea mişcării este exprimată de condiţia

$$D\Omega_j^{(i)} = \mathrm{d}\Omega_j^{(i)} - \delta\Omega_j^{(i)} = 0$$

pentru orice $\delta$. Avem evident

$$D\Omega_j^{(i)} = \sum_j \mathrm{d}p_j \delta x_j + \sum_j \mathrm{d}\theta_j \delta\alpha_j - \mathrm{d}H\delta t - \sum_j \mathrm{d}x_j \delta p_j - \\ - \sum_j \mathrm{d}\alpha_j \delta\theta_j + \delta H \mathrm{d}t. \tag{12}$$

Egalînd cu zero coeficienţii lui $\delta x_j$, $\delta\alpha_j$, $\delta t$ şi dat fiind că $H$ nu conţine, prin ipoteză, variabilele $x$, $\alpha$ şi $t$, ci numai invarianţii citaţi, obţinem primul grup de ecuaţii

$$\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{13}$$

ceea ce demonstrează uniformitatea mişcării şi conservarea energiei $H$. Al doilea grup de ecuaţii rezultă din anularea coeficienţilor lui $\delta p_j$ şi $\delta\theta_j$. Obţinem, atunci, în primul rînd

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \qquad j = 1,\ 2,\ 3.$$

Întrucît $H$ depinde de $p_1$, $p_2$, $p_3$ prin intermediul lui $\alpha$, din aceste ecuaţii rezultă

$$\dot{x}_j = \frac{\partial H}{\partial \alpha} p_j, \qquad j = 1, 2, 3 \tag{14}$$

şi punînd

$$m = 1 \quad \frac{\partial H}{\partial \alpha}$$

din ecuaţiile precedente obţinem expresia impulsului

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad (p_j = m\dot{x}_j, \quad j = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Al doilea grup de ecuaţii, care rezultă din anularea coeficienţilor variaţiilor $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, $\delta\alpha_3$, este de forma

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial H}{\partial \theta_j}, \tag{16}$$

de unde, folosind (9), rezultă

$$\sum_j \frac{\partial H}{\partial \theta_j}\delta\theta_j = \sum_j \varkappa_j \delta\omega_j + \sum_j \lambda_j \delta\varphi_j. \tag{17}$$

Dat fiind că $H$ depinde de $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ prin intermediul invarianţilor $\omega$ şi $\varphi$, primul membru din (17) se poate scrie

$$\sum_j \frac{\partial H}{\partial \omega_j}\delta\omega_j + \sum_j \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}\delta\varphi_j;$$

putem deci pune

$$\varkappa_j = \frac{\partial H}{\partial \omega_j}; \quad \lambda_j = \frac{\partial H}{\partial \varphi_j}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

3. *Două convenţii.* Pentru a continua, trebuie să mai facem încă două convenţii care caracterizează corpul considerat.

1°. *Convenţie.* Este evident că tensorul

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{m} l_{jk}$$

are dimensiunea pătratului unei lungimi. Presupunem ca în cazul rigidului omogen clasic că *el nu depinde de distribuţia de masă.* Atunci ecuaţiile (6) mai pot fi scrise

$$\theta_1 = (\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\, m\dot{\alpha}_1 - \varepsilon_{12} m\dot{\alpha}_2 + \varepsilon_{13} m\dot{\alpha}_3. \tag{18}$$

Efectuînd în (18) inversarea care a condus de la (6) la (8), rezultă relaţiile

$$\begin{aligned} m\dot{\alpha}_1 &= u_1\theta_1 - v_3\theta_2 + v_2\theta_3, \\ m\dot{\alpha}_2 &= v_3\theta_1 + u_2\theta_2 - v_1\theta_3, \\ m\dot{\alpha}_3 &= -v_2\theta_1 + v_1\theta_2 + u_3\theta_3, \end{aligned} \tag{19}$$

unde $u_1$, $u_2$, $u_3$, $v_1$, $v_2$, $v_3$ nu depind decît de structura spaţială a corpului.

2°. *Convenție.* Presupunem că relația dintre masa corpului material în mișcare inerțială, care este o constantă, și energia aceluiași corp, constantă și ea în tot timpul mișcării, *să fie independentă de condițiile inițiale ale mișcării.* Dacă nu ar fi independentă, s-ar ajunge la contradicții pe care nu le aprofundăm deocamdată.

Dacă avem $\dot{\alpha}_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$), relațiile (8) arată că $\theta_j^0 = 0$ ($j = 1, 2, 3$), iar ecuațiile (13) arată că $\theta_j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) în cursul mișcării. Corpul se comportă ca un punct material și avem

$$H = mc^2, \tag{20}$$

deci relația este valabilă pentru rigid, oricare ar fi condițiile inițiale.

Putem acum să reluăm examinarea mișcării plecînd de la forma

$$\Omega_\delta^{(i)} = \sum_j p_j \delta x_j + \sum_j \theta_j \delta \alpha_j - mc^2 \delta t. \tag{21}$$

Dacă ținem seama de relațiile obținute mai sus, rezultă că

$$D\Omega_j^{(i)} = - \sum_j \mathrm{d}x_j \delta p_j - \sum \mathrm{d}\alpha_j \delta \theta_j + c^2 m \delta t = 0.$$

Înmulțind cu $m$, obținem relația

$$\sum_j p_j \delta p_j + \sum_j m\dot{\alpha}_j \delta \theta_j = c^2 m \delta m. \tag{22}$$

Dacă acum folosim (19), rezultă egalitatea

$$\delta\left(\frac{1}{2}\Sigma p_j^2 + \frac{1}{2}\Sigma u_j \theta_j^2 + \Sigma v_j \varphi_j\right) = \frac{1}{2} c^2 \delta(m^2),$$

dat fiind că $u_j$ și $v_j$ nu depind de $\theta_j$ și $\varphi_j$.
De aici, cu notațiile date mai înainte, rezultă

$$\alpha + \Sigma u_j \omega_j + \Sigma v_j \varphi_j = \frac{1}{2} c^2 (m^2 - m_0^2), \tag{23}$$

după ce am notat cu $m_0$ masa corpului în repaus ($\mathbf{p} = 0$, $\boldsymbol{\theta} = 0$).

Din (23) obținem expresia masei dinamice

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{2}{c^2}\left(\alpha + \sum_j u_j \omega_j + \sum_j v_j \varphi_j\right)} \tag{24}$$

şi aceea a energiei

$$H = c\sqrt{m_0^2c^2 + 2(\alpha + \Sigma u_j\omega_j + \Sigma v_j\varphi_j)}.$$

Întrucît $\delta\varphi$ are forma unui produs vectorial între $\boldsymbol{\theta}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ şi $\delta\boldsymbol{\theta}(\delta\theta_1, \delta\theta_2, \delta\theta_3)$, $\delta\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\theta} \times \delta\boldsymbol{\theta}$, obţinem, pentru o mişcare în care $\boldsymbol{\theta}$ variază în funcţie de $t$

$$\varphi = \varphi_{t_0} + \int_{t_0}^{t} (\theta(s) \times \theta'(s))\, ds,$$

unde $\theta(t)$ corespunde legii efective a mişcării.

## § 2. Mişcarea într-un cîmp

1. *Forma potenţială* $\Omega_j^{(p)}$. Corespunzător formei inerţiale (21, §1) a lui $\Omega_\delta^{(i)}$, cîmpul va fi definit cu ajutorul a două potenţiale vectoriale $\mathbf{A}(A_1, A_2, A_3)$ şi $\mathbf{B}(B_1, B_2, B_3)$, primul relativ la poziţia lui $P$, al doilea relativ la orientarea corpului, şi al unui potenţial scalar $C$.

Vom avea deci

$$\Omega_\delta^{(p)} = \sum_j A_j\delta x_j + \sum_j B_j\delta\alpha_j - C\delta t. \tag{1}$$

Apriori trebuie să considerăm pe $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, şi $C$ ca funcţii de toate variabilele $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $t$. Dacă însă ne limităm la cîmpurile clasice şi adoptăm calcule corespunzătoare ale vectorilor $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ şi al lui $C$, indicate de natura acestor cîmpuri, aşa cum vom proceda de altfel în paragraful următor, aceştia trebuie consideraţi funcţii numai de $x_1$, $x_2$, $x_3$ şi $t$, cum vom face pînă la urmă.

Observaţie importantă. Nu putem totuşi să excludem existenţa unor cîmpuri ireductibile la componente elementare, aşa cum presupunem în paragraful următor, şi, cu aceasta, eventuala dependenţă a cîmpului $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $C$ şi de unghiurile $\alpha$.

Din acest motiv, efectuăm calculul mai întîi în acest caz general.

2. *Ecuaţia mişcării.* Avem evident

$$D\Omega_\delta^{(p)} = \sum_j \mathrm{d}A_j\delta x_j + \Sigma\,\mathrm{d}B_j\delta\alpha_j - \mathrm{d}C\,\delta t - \sum_h \mathrm{d}x_h\delta A_h -$$

$$- \sum_h \mathrm{d}\alpha_h\delta B_h + \mathrm{d}t\,\delta C \tag{2}$$

sau încă, explicitînd,

$$D\Omega_\delta^{(p)} = \sum_j \left[ \left( \mathrm{d}A_j - \sum_h \mathrm{d}x_h \frac{\partial A_h}{\partial x_j} - \sum_h \mathrm{d}\alpha_h \frac{\partial B_h}{\partial x_j} + \mathrm{d}t \frac{\partial C}{\partial x_j} \right) \delta x_j + \right.$$

$$+ \left( \mathrm{d}B_j - \sum_h \mathrm{d}x_h \frac{\partial A_h}{\partial \alpha_j} - \sum_h \mathrm{d}\alpha_h \frac{\partial B_h}{\partial \alpha_j} + \mathrm{d}t \frac{\partial C}{\partial \alpha_j} \right) \delta \alpha_j \Big] -$$

$$- \left( \mathrm{d}C + \Sigma \mathrm{d}x_h \frac{\partial A_h}{\partial t} + \sum_h \mathrm{d}\alpha_h \frac{\partial B_h}{\partial t} - \mathrm{d}t \frac{\partial C}{\partial t} \right) \delta t. \tag{3}$$

Pe de altă parte, dezvoltînd (21), obţinem

$$D\Omega_\delta^{(i)} = \sum_j \mathrm{d}p_j \delta x_j + \sum_j \mathrm{d}\theta_j \delta \alpha_j - \mathrm{d}H \delta t -$$

$$- \left( \mathrm{d}x_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \mathrm{d}t \right) \delta p_j - \left( \mathrm{d}\alpha_j - \frac{\partial H}{\partial \theta_j} \mathrm{d}t \right) \delta \theta_j. \tag{4}$$

Egalînd între ei coeficienţii variaţiilor $\delta x_j$, $\delta \alpha_j$, $\delta t$ din membrii ai doilea ai expresiilor (3) şi (4), se obţin, prin aplicarea principiului fundamental, în primul rînd relaţiile

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \theta_j}, \qquad j = 1, 2, 3, \tag{5}$$

verificate identic de definiţia impulsurilor şi gata obţinute în § 1.

Obţinem, în continuare, ecuaţiile mişcării

$$\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}t} - \sum_h \dot{x}_h \frac{\partial A_h}{\partial x_j} - \sum_h \dot{\alpha}_h \frac{\partial B_h}{\partial x_j} + \frac{\partial C}{\partial x_j}, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial C}{\partial \alpha_j} - \sum_h \dot{x}_h \frac{\partial A_h}{\partial \alpha_j} - \sum_h \dot{\alpha}_h \frac{\partial B_h}{\partial \alpha_j} \tag{7}$$

şi ecuaţia de bilanţ a schimbului de energie dintre corp şi cîmp

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial C}{\partial t} - \sum_h \dot{x}_h \frac{\partial A_h}{\partial t} - \sum_h \dot{\alpha}_h \frac{\partial B_h}{\partial t}. \tag{8}$$

Primul grup de ecuaţii mai poate fi scris

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1}\right)\dot{x}_3 - \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}\right)\dot{x}_2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial B_1}{\partial x_1}\right)\dot{\alpha}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial B_2}{\partial \alpha_2}\right)\dot{\alpha}_2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial B_3}{\partial x_1}\right)\dot{\alpha}_3, \qquad (9)$$

împreună cu alte două ecuaţii asemănătoare.

Există, deci, un cîmp electric, un cîmp magnetic şi un cîmp mixt care determină împreună mişcarea corpului.

*Cazul special cînd* **A**, **B**, $C$ *depind numai de* $x_1$, $x_2$, $x_3$ *şi* $t$. Dacă presupunem că **A**, **B**, $C$ depind numai de $x_1$, $x_2$, $x_3$ şi $t$, ecuaţiile mişcării se simplifică simţitor. Cu notaţia vectorială ecuaţia (6) devine

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{H} - \operatorname{grad} K,$$

unde

$$\mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{grad} C, \qquad (10)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$K = \dot{\alpha}_1 B_1 + \dot{\alpha}_2 B_2 + \dot{\alpha}_3 B_3. \qquad (11)$$

Ecuaţia (7) se reduce la

$$\frac{d\theta_j}{dt} = \frac{dB_j}{dt}, \qquad (12)$$

deci, cu notaţia vectorială,

$$\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0 = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0. \qquad (13)$$

3. *Calculul elementelor* **A**, **B**, $C$. Principiul curent de calcul pentru forma $\Omega_\delta^{(p)}$ relativă la corpul $C$ este cel ce decurge din ipoteza de aditivitate a formelor elementare

$$\omega_\delta^{(p)} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\xi}, t)\,\delta\boldsymbol{\xi} - a_0(\boldsymbol{\xi}, t)\,\delta t,$$

corespunzătoare componentelor elementare ale corpului de masă respectivă $d\mu$, care poate fi de natură oarecare, o sarcină electrică de exemplu, sau un alt tip de sarcină pe care nu îl precizăm.

Admitem, deci, prin definiție,

$$\Omega_\delta^{(p)} = \int_C [\mathbf{a}(\xi, t)\, \delta\xi - a_0(\xi, t)\, \delta t]\, d\mu \tag{14}$$

și punem

$$\mu = \int_C d\mu,$$

cu ipoteza implicită ca $\mu$ să fie finit.

Punem de asemenea

$$\xi = \mathbf{x} + \mathbf{r}, \tag{15}$$

unde $\mathbf{x}$ este vectorul poziție al centrului de masă $G$ al corpului și $\mathbf{r}$ este vectorul $GP$. Pentru orice deplasare a rigidului avem

$$\delta\xi = \delta\mathbf{x} + \mathbf{r} \times \delta\alpha. \tag{16}$$

Deci

$$\Omega_\delta^{(p)} = \left[\int_C \mathbf{a}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)\, d\mu\right] \cdot \delta\mathbf{x} + \left[\int_C (\mathbf{a}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \times \mathbf{r})\, d\mu\right] \cdot \delta\alpha -$$

$$- \left[\int_C a_0(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)\, d\mu\right] \delta t. \tag{17}$$

Coeficienții lui $\delta\mathbf{x}$, $\delta\alpha$ și $\delta t$ depind evident de $\mathbf{x}$ și de $t$.

Integralele se referă la $\mathbf{r}$ și $t$ și nu depind de coordonate. Ele vor fi calculate în raport cu un sistem legat rigid de corp și vor fi independente de orice alte elemente asociate mișcării, diferite de $\mathbf{x}$ și $t$. Vom avea deci, în cazul general, pornind de la formula (14)

$$\Omega_\delta^{(p)} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)\, \delta\mathbf{x} + \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)\, \delta\alpha - C(\mathbf{x}, t)\, \delta t. \tag{18}$$

4. *Spațiul corpusculelor.* În cazul care ne interesează în special, al corpusculelor de dimensiuni care permit aproximări simple, presupunem că funcțiile cîmpului $\tilde{a}(\xi, t)$ admit derivate parțiale continue pînă la ordinul al doilea. Dacă luăm pentru reprezentarea vectorului poziție $\mathbf{r}$ un sistem de coordonate legat de corp, componentele lui $\mathbf{r}$ vor fi $\zeta_h (h = 1, 2, 3)$ și putem scrie

$$\tilde{a}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) = \tilde{a}(\mathbf{x}, t) + \sum_h \zeta_h \tilde{a}^h(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{h,k} \zeta_k \zeta_h \tilde{a}^{hk}(\mathbf{x}, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{h,k} \zeta_h \zeta_k [\tilde{a}^{hk}(x_1 + u_1\zeta_1,\ x_2 + u_2\zeta_2,\ x_3 + u_3\zeta_3, t) - \tilde{a}^{hk}(\mathbf{x}, t)],$$

$$\text{cu} \quad |u_1|, |u_2|, |u_3| < 1. \tag{19}$$

Rezultă atunci

$$\widetilde{A}(\mathbf{x}, t) = \mu\widetilde{a}(\mathbf{x}, t) + \sum_j l_j\widetilde{a}^j(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2}\sum_{j,k} l_{jk}\widetilde{a}^{jk}(\mathbf{x}, t) + \varepsilon$$

cu

$$l_j = \int_C \zeta_j \, \mathrm{d}\mu\,; \quad l_{jk} = \int_C \zeta_j\zeta_k \, \mathrm{d}\mu,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{j,k}\int_C \zeta_j\zeta_k[\widetilde{a}^{jk}(x_1 + u_1\zeta_1, x_2 + u_2\zeta_2, x_3 + u_3\zeta_3) - \widetilde{a}^{jk}(\mathbf{x}, t)]\,\mathrm{d}\mu$$

şi

$$\widetilde{a}^j = \frac{\partial\widetilde{a}}{\partial x_j}, \qquad \widetilde{a}^{jk} = \frac{\partial^2\widetilde{a}}{\partial x_j\,\partial x_k},$$

$\widetilde{a}$ fiind vectorul $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_0$.

Cu aceleaşi convenţii şi ţinînd seama de (18) avem

$$\widetilde{B}(\mathbf{x}, t) = \int_C [\mathbf{a}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)\times\mathbf{r}]\,\mathrm{d}\mu = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)\times\mathbf{l} +$$

$$+ \sum_j \mathbf{a}^j(\mathbf{x}, t)\times\mathbf{l}_j) + \varkappa, \tag{21}$$

unde $\mathbf{l}$ este vectorul de componente $\int_C \zeta_h \, \mathrm{d}\mu$ cu $h = 1, 2, 3$, $\mathbf{l}_j$ este sistemul de vectori de componente $\int_C \zeta_j\zeta_h \, \mathrm{d}\mu$, cu $h = 1,2,3$, $\varkappa$ fiind format dintr-un număr de termeni de forma

$$\int_C \zeta_j\zeta_h\zeta_k \, b(\zeta, t) \, \mathrm{d}\mu,$$

de ordin inferior lui $K\lambda^3$ şi pe care îi presupunem neglijabili. Prin urmare

$$\Omega_\delta^{(p)} = \left(\mu\mathbf{a} + \sum_j l_j\mathbf{a}^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} l_{jk}\mathbf{a}^{jk} + \varepsilon\right)\delta\mathbf{x} +$$

$$+ [\mathbf{a}\times\mathbf{l} + \sum_j (\mathbf{a}^j\times\mathbf{l}_j) + \varkappa]\,\delta\boldsymbol{\alpha} - [\mu a_0 + \sum_j l_j a_0^j + \sum_{j,k} l_{jk}a_0^{jk} + \varepsilon_0]\,\delta t, \tag{22}$$

coeficienţii $l_j$ şi $l_{jk}$ fiind caracteristici invariante ale corpului $C$ şi $\widetilde{a}$ împreună cu derivatele ei $\widetilde{a}^j$, $\widetilde{a}^{jk}$ fiind funcţii continue numai de $\mathbf{x}$ şi $t$.

5. *Clasificarea corpusculelor.* O particulă se va numi de prima specie dacă termenii care conţin pe $l_{jk}$ sînt neglijabili. În acest caz se consideră

$$\Omega_\delta^{(p)} = (\mu\mathbf{a} + \sum_j l_j\mathbf{a}^j)\,\delta\mathbf{x} + (\mathbf{a}\times\mathbf{l})\,\delta\boldsymbol{\alpha} - (\mu a_0 + \sum_j l_j a_0^j)\,\delta t. \tag{23}$$

Particula este de specia a doua dacă sînt neglijabili termenii de ordin superior tensiunilor $l_{jk}$ şi luăm

$$\Omega_\delta^{(p)} = \left(\mu\mathbf{a} + \sum_j l_j\mathbf{a}^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} l_{jk}\mathbf{a}^{jk}\right)\delta\mathbf{x} + [\mathbf{a}\times\mathbf{l} + \sum_j (\mathbf{a}^j\times\mathbf{l}_j)]\,\delta\boldsymbol{\alpha} -$$

$$-\left(\mu a_0 + \sum_j l_j a_0^j + \frac{1}{2}\sum_{j,k} l_{jk}a_0^{jk}\right)\delta t. \tag{24}$$

Dacă presupunem că mărimile $\mathbf{a}$ şi $a_0$ în raport cu unitatea de sarcină sînt de ordin curent, să spunem de acelaşi ordin ca în cazul unei particule elementare, avem, notînd cu $e$ unitatea de sarcină,

$$\mu = \text{multiplu de } e,\ l \sim \mu\cdot 10^{-23},\quad l_{jk} \sim \mu 10^{-46}.$$

Dacă în loc de sarcină este vorba de o masă, mezonică de exemplu, trebuie să dăm lui $\mu$ valori corespunzătoare, care nu influenţează sensibil ordinul de mărime al lui $l$ şi al lui $l_{jk}$.

Ecuaţiile mişcării unui corpuscul de prima speţă derivă deci din (22), avînd şi

$$H_{\mathrm{I}} = (\mathbf{a}\times\mathbf{l})\,\boldsymbol{\alpha},$$
$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}^0 + [\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, 0)]\times\mathbf{l}. \tag{25}$$

Pentru un corpuscul de specia a doua avem

$$H_{\mathrm{II}} = [\mathbf{a}\times\mathbf{l} + \sum_j (\mathbf{a}^j\times\mathbf{l}_j)]\,\boldsymbol{\alpha}$$

şi

$$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{II}}^0 + [\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, 0)]\times\mathbf{l} + \sum_j [\mathbf{a}^j(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}^j(\mathbf{x}, 0)]\times\mathbf{l}_j. \tag{26}$$

La ecuaţiile (21) şi (23) trebuie să adăugăm ecuaţiile

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial p_j};\quad \frac{\mathrm{d}\alpha_j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial \theta_j}, \tag{27}$$

unde $H$ este dat de expresia (25) implicînd prezenţa valorilor $\varphi_j$, care nu se anulează, ca în cazul particular al mişcării inerţiale.

## Comentarii

Partea spaţială a formei $\Omega_\delta^{(i)}$, pe care o notăm cu $\pi_\delta$ este reprezentată de integrala

$$\pi_\delta = \int_C \dot{\boldsymbol{\xi}}\cdot\delta\boldsymbol{\xi}\,\mathrm{d}m,$$

unde $\dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \delta\boldsymbol{\xi}\, dm$ este partea spaţială a formei $\omega_\delta^{(i)} = (\dot{\boldsymbol{\xi}} dm)\, \delta\boldsymbol{\xi} - c^2\, dm\, \delta t$ corespunzătoare părţii $dm$ din $C$.

Dacă $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ corespunde centrului de gravitate al corpului la momentul $t$ şi punem $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} + \mathbf{r}$ avem

$$\delta\boldsymbol{\xi} = \delta\mathbf{x} + \delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{x} + \mathbf{r} \times \delta\boldsymbol{\alpha},$$

unde $\delta\boldsymbol{\alpha}$ este vectorul de componente $\delta\alpha_1$, $\delta\alpha_2$, $\delta\alpha_3$.
În acelaşi mod vom avea

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\alpha}},$$

de unde

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}\delta\boldsymbol{\xi} = \dot{\mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{r} \times \delta\boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{r} \times \mathbf{x}\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot \delta\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \cdot (\mathbf{r} \times \delta\boldsymbol{\alpha}).$$

Ţinînd seama că $\int_C \mathbf{r}\, dm = 0$ rezultă

$$\pi_j = m\dot{\mathbf{x}}\, \delta\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta}\delta\boldsymbol{\alpha} - H\delta t$$

şi punînd

$$m = \int_C dm$$

rezultă imediat

$$\Omega_\delta^{(i)} = m\dot{\mathbf{x}}\ \delta\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha} - H\delta t,$$

unde $\boldsymbol{\theta}$ este vectorul $\int_C (\mathbf{r} \times \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \times \mathbf{r}\, dm$.

Calculul lui $\boldsymbol{\theta}$ poate fi efectuat raportînd pe $\mathbf{r}$ la un sistem de referinţă asociat corpului.

Capitolul III

# MECANICA INVARIANTIVĂ A SISTEMELOR DE PUNCTE MATERIALE

Analiza mişcării inerţiale a unui punct material izolat pune în evidenţă dependenţa cunoscută între masa dinamică a punctului şi viteza sa.

Analiza mişcării inerţiale a unui sistem de două puncte materiale pune în lumină două tipuri de interacţiuni inerţiale :

— *interacţiunea gravitaţională*, care a constituit pînă acum motorul unic al mişcărilor din Univers

— *interacţiunea dilataţională*, care s-a revelat numai în ultima vreme prin efectul cunoscut sub numele lui Hubble.

Aceste două forme ale interacţiunii inerţiale ale corpurilor Universului sînt unice, singurele posibile, aşa cum ne arată analiza unui sistem de oricîte puncte materiale, ai cărui invarianţi euclidieni sînt formaţi din distanţe şi unghiuri, oricare este numărul lor.

## § 1. Sistemul inerţial a două puncte materiale

1. *Invarianţii euclidieni ai sistemului constituit din punctele* $P_1$ *şi* $P_2$. Notăm cu $\mathbf{p}_1$ şi $\mathbf{p}_2$ impulsurile, cu $\boldsymbol{\rho}_1$ şi $\boldsymbol{\rho}_2$ vectorii poziţie faţă de un reper euclidian determinat şi cu

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$$

vectorul distanţă. Invarianţii euclidieni sînt daţi de expresiile următoare :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1^2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_2^2, \quad \alpha = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2,$$
$$\beta_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_1, \quad \beta_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{p}_2, \quad \beta = \frac{1}{2}\mathbf{r}^2, \tag{1}$$

atunci

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta).$$

Avem în acest caz

$$\omega_\delta^{(i)} = \sum_{j=1,2} \mathbf{p}_j \delta\boldsymbol{\rho}_j - H\delta t, \tag{2}$$

deci

$$D\omega_{\delta}^{(i)} = \sum_{j=1,2} \mathrm{d}\mathbf{p}_j \delta\boldsymbol{\rho}_j - \sum_{j=1,2} \mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_j \delta\mathbf{p}_j - \mathrm{d}H\delta t + \delta H \mathrm{d}t = 0, \tag{3}$$

pentru orice $\delta$.

În această expresie avem

$$\delta H = H_{\alpha_1}\mathbf{p}_1\delta\mathbf{p}_1 + H_{\alpha_2}\mathbf{p}_2\delta\mathbf{p}_2 + H_{\alpha}\mathbf{p}_2\delta\mathbf{p}_1 + H_{\alpha}\mathbf{p}_1\delta\mathbf{p}_2 + H_{\beta}\mathbf{r}\delta\mathbf{r} +$$

$$+ H_{\beta_1}\mathbf{r}\delta\mathbf{p}_1 + H_{\beta_2}\mathbf{r}\delta\mathbf{p}_2 + H_{\beta_1}\mathbf{p}_1\delta\mathbf{r} + H_{\beta_2}\mathbf{p}_2\delta\mathbf{r},$$

unde am scris $H_{\alpha}$ în loc de $\dfrac{\partial H}{\partial_{\alpha}}$ etc şi trebuie să considerăm

$$\delta\mathbf{r} = \delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1.$$

Membrul al doilea din (3) devine atunci

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t_1} - H_{\beta_1}\mathbf{p}_1 - H_{\beta_2}\mathbf{p}_2 - H_{\beta}\mathbf{r}\right)\delta\boldsymbol{\rho}_1 + \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} + H_{\beta_1}\mathbf{p}_1 + H_{\beta_2}\mathbf{p}_2 + H_{\beta}\mathbf{r}\right)\delta\boldsymbol{\rho}_2 +$$

$$+ \left(-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1}{\mathrm{d}t} + H_{\alpha_1}\mathbf{p}_1 + H_{\alpha}\mathbf{p}_2 + H_{\beta_1}\mathbf{r}\right)\delta\mathbf{p}_1 +$$

$$+ \left(-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2}{\mathrm{d}t} + H_{\alpha_2}\mathbf{p}_2 + H_{\alpha}\mathbf{p}_1 + H_{\beta_2}\mathbf{r}\right)\delta\mathbf{p}_2 - \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\delta t = 0. \tag{4}$$

2. *Ecuaţiile mişcării.* Anulînd coeficienţii lui $\delta\boldsymbol{\rho}_1$, $\delta\boldsymbol{\rho}_2$, $\delta\mathbf{p}_1$, $\delta\mathbf{p}_2$, $\delta t$, se obţin mai întîi ecuaţiile mişcării

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} &= H_{\beta_1}\mathbf{p}_1 + H_{\beta_2}\mathbf{p}_2 + H_{\beta}\mathbf{r}, \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} &= -H_{\beta_1}\mathbf{p}_1 - H_{\beta_2}\mathbf{p}_2 - H_{\beta}\mathbf{r}, \qquad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

şi apoi relaţiile care ne vor servi la definirea impulsurilor

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= H_{\alpha_1}\mathbf{p}_1 + H_{\alpha}\mathbf{p}_2 + H_{\beta_1}\mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &= H_{\alpha_2}\mathbf{p}_2 + H_{\alpha}\mathbf{p}_1 + H_{\beta_2}\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{6}$$

unde $\mathbf{v}_1 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_1}{\mathrm{d}t}$, $\mathbf{v}_2 = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}_2}{\mathrm{d}t}$.

3. *Teoremele de conservare.* Ecuaţiile (5) ne dau cele două teoreme de conservare :

a) *Conservarea impulsului total*

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const.}, \tag{7}$$

care rezultă din adunarea membru cu membru a primelor două egalităţi (5).

b) *Conservarea energiei*

$$H = \text{const.}, \tag{8}$$

care exprimă sub formă întreagă ultima ecuaţie din (5).

4. *Determinarea impulsurilor* $\mathbf{p}_1$ *şi* $\mathbf{p}_2$. Din ultimele ecuaţii (6) obţinem, cu condiţia să verificăm ulterior inegalitatea

$$\Delta = H_{\alpha_1}H_{\alpha_2} - H_\alpha^2 \neq 0, \tag{9}$$

expresiile impulsurilor

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \frac{H_{\alpha_2}}{\Delta}\mathbf{v}_1 - \frac{H_\alpha}{\Delta}\mathbf{v}_2 + \frac{H_{\beta_2}H_\alpha - H_{\alpha_2}H_{\beta_1}}{\Delta}\mathbf{r}, \\ \mathbf{p}_2 &= \frac{H_{\alpha_1}}{\Delta}\mathbf{v}_2 - \frac{H_\alpha}{\Delta}\mathbf{v}_1 + \frac{H_{\beta_1}H_\alpha - H_{\alpha_1}H_{\beta_2}}{\Delta}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{10}$$

Dacă punem

$$m_1 = \frac{H_{\alpha_2}}{\Delta}, \; m_2 = \frac{H_{\alpha_1}}{\Delta}, \; \mu = -\frac{H_\alpha}{\Delta}, \; l_1 = \frac{H_{\beta_2}H_\alpha - H_{\alpha_2}H_{\beta_1}}{\Delta} = h_1\varkappa,$$

$$l_2 = \frac{H_{\beta_1}H_\alpha - H_{\alpha_1}H_{\beta_2}}{\Delta} = h_2\varkappa,$$

expresiile (10) devin

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= m_1\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 + h_1\varkappa\mathbf{r}, \\ \mathbf{p}_2 &= m_2\mathbf{v}_2 + \mu\mathbf{v}_1 + h_2\varkappa\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{11}$$

unde $\mu$, care reprezintă o masă, se va numi masa de interacţiune gravitaţională, iar $\varkappa$, căruia îi atribuim, pentru omogeneitate, caracterul de masă, se va numi masa de interacţiune dilataţională.

5. *Determinarea expresiei energiei H.* Conform principiului 4°, expresia lui $H$ trebuie să se reducă, în condiţiile newtoniene, la forma

$$H_{\text{NEWTON}} = \frac{1}{2} m_1^0 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2^0 v_2^2 - f\frac{m_1^0 m_2^0}{r} + C. \tag{12}$$

Întrucît $H_{\text{NEWTON}}$ este definită în afara unei constante şi întrucît, pentru orice punct material, cînd se trece la macanica invariantivă se găseşte în loc de $\frac{1}{2} m_1^0 v^2 + C$ expresia $mc^2$, putem scrie

$$H = c^2(m_1 + m_2 + 2\mu + 2\varkappa), \tag{13}$$

introducînd în paranteză, pe lîngă masele individuale, pe acelea de interacţiune impuse de expresiile (11).

Sub această formă, $H$ trebuie să verifice condiţiile impuse de principiul 2.

Dat fiind că

$$m_j = \sqrt{m_j^{02} + m_j^2 \mathbf{v}_j^2/c^2},$$

avem

$$\delta c^2 m_j = \mathbf{v}_j \cdot \delta(m_j \mathbf{v}_j); \quad j = 1, 2. \tag{14}$$

Considerînd (11), avem

$$\begin{aligned} \delta(c^2 m_1) &= \mathbf{v}_1 \cdot \delta(\mathbf{p}_1 - \mu\mathbf{v}_2 - l_1\mathbf{r}), \\ \delta(c^2 m_2) &= \mathbf{v}_2 \cdot \delta(\mathbf{p}_2 - \mu\mathbf{v}_1 - l_2\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{15}$$

Punem pentru fiecare funcţie $F$ de argumentele precedente

$$\delta F = \delta_1 F + \delta_2 F,$$

unde $\delta_1 F$ este variaţia lui $F$ rezultată din variaţia lui $r$ şi $\delta_2 F$ este variaţia rezultată de la celelalte argumente.

Astfel avem

$$\delta F = F_r \frac{\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}}{r} + \delta_2 F.$$

Ca urmare a acestei convenţii obţinem din (15) următoarele rezultate:

$$\delta(c^2 m_1) = \mathbf{v}_1 \cdot \delta\mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \delta\mu - \mu\mathbf{v}_1 \cdot \delta\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \cdot \delta l_1 - l_1\mathbf{v}_1(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) =$$

$$= \mathbf{v}_1 \cdot \delta\mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \mu_r \frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \delta_2\mu - \mu\mathbf{v}_1 \cdot \delta\mathbf{v}_2 -$$

$$- \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} l_{1,r} \frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) - \mathbf{v}_1\mathbf{r} \cdot \delta_2 l_1 - l_1\mathbf{v}_1(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1); \tag{16}$$

$$\delta(c^2 m_2) = \mathbf{v}_2 \cdot \delta\mathbf{p}_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \mu_r \frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \delta_2\mu -$$

$$- \mu\mathbf{v}_2 \cdot \delta\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} l_{2,r} \frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}\delta_2 l_2 - l_2\mathbf{v}_2(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1);$$

$$\delta(c^2 \mu) = c^2 \mu_r \frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) + c^2 \delta_2\mu;$$

$$\delta(c^2 \varkappa) = c^2 \varkappa_r \frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) + c^2 \delta_2\varkappa.$$

Deci pentru $H$ definită de (13) obţinem

$$\delta H = \mathbf{v}_1 \cdot \delta\mathbf{p}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \delta\mathbf{p}_2 - \Big[(2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \mu_r + l_{1,r}\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} + l_{2,r}\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} -$$

$$- 2c^2\mu_r - 2c^2\varkappa_r)\frac{\mathbf{r}}{r} + l_1\mathbf{v}_1 + l_2\mathbf{v}_2\Big](\delta\boldsymbol{\rho}_2 - \delta\boldsymbol{\rho}_1) + \tag{17}$$

$$+ (2c^2 - 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\delta_2\mu - \mu\delta(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \cdot \delta_2 l_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \cdot \delta_2 l_2 + 2c^2\delta_2\varkappa.$$

Din principiul 2 obţinem atunci, folosind (17), egalitatea

$$\left(\frac{\delta\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} - \mathbf{L}\right)\delta\boldsymbol{\rho}_1 + \left(\frac{\delta\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} + \mathbf{L}\right)\delta\boldsymbol{\rho}_2 + 2c^2(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2)\delta_2\mu - \mu\delta(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) +$$

$$+ 2c^2\delta_2\varkappa - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \cdot \delta_2 l_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \cdot \delta_2 l_2 - \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\delta t = 0, \tag{18}$$

unde

$$\mathbf{L} = [2c^2(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2)\mu_r + 2c^2\varkappa_r - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r}l_{1,r} - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r}l_{2,r}] \frac{\mathbf{r}}{r} - l_1\mathbf{v}_1 - l_2\mathbf{v}_2. \quad (19)$$

Obţinem deci ecuaţiile mişcării sub forma

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{L}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{L}, \quad H = H_0. \quad (20)$$

Membrii doi ai primelor două ecuaţii corespund, în limbajul newtonian, la forţele egale şi de sens contrar pe care cele două corpuri le exercită unul asupra celuilalt. Energia constantă $H$ este suma celor două energii proprii ale celor două corpuri $P_1$ şi $P_2$, a energiei gravitaţionale $2c^2\mu$ şi a unei energii de interacţiune $2c^2\varkappa$, a cărei structură va fi explicată în cele ce urmează.

Legea $H = H_0$ corespunde, pentru sistemul inerţial, conservării masei totale

$$m_1 + m_2 + 2\mu + 2\varkappa = m_{1,0} + m_{2,0} + 2\mu_0 + 2\varkappa_0,$$

formată din masele individuale, masa de interacţiune gravitaţională sau a lui Newton şi masa de interacţiune $\varkappa$.

6. *Determinarea masei de interacţiune gravitaţională* $\mu$. Separînd, în relaţia (18), termenii care conţin pe $\mu$, obţinem

$$2c^2(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2)\delta_2\mu = \mu\delta_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2), \quad (21)$$

unde, în al doilea membru, am pus $\delta_2$ în loc de $\delta_1$, dat fiind că $r$ nu apare direct în paranteză.

Prin integrare, se obţine

$$\mu = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2}}, \quad (22)$$

unde $\varphi(r)$ este o funcţie de $r$ care urmează să fie determinată.

Ţinînd seama de (12) va trebui să luăm

$$\varphi(r) = -\frac{1}{2} f \frac{m_1^0 m_2^0}{c^2 r}\left(1 + \frac{\lambda(r)}{c^2}\right) \quad (23)$$

determinarea funcţiei $\lambda(r)$ urmînd a fi făcută ţinîndu-se seama de mişcarea seculară a periheliului lui Mercur care nu este explicată de forma newtoniană a lui $\varphi(r)$.

Necesitatea prezenţei termenului suplimentar $\frac{\lambda(r)}{c^2}$ şi determinarea lui, care dă

$$\lambda(r) = \frac{9}{2} f \frac{m_1^0 + m_2^0}{r},$$

sînt datorate astronomului dr. *Ieronim Mihăilă* şi lămurite în nota sa care termină acest volum.

În cazul vitezelor şi distanţelor obişnuite $\mu$ este practic egal cu $-\frac{1}{2} f \frac{m_1^0 m_2^0}{c^2 r}$ şi energia respectivă este aceea care apare în teoria newtoniană, adică $-f\frac{m_1^0 m_2^0}{r}$. Experienţa terestră împreună cu cea astronomică, în ceea ce priveşte sistemul solar şi chiar corpurile aparţinînd galaxiei noastre, nu impun alte elemente decît cele precedente pentru a fi luate în considerare; masa $\varkappa$ poate fi deci neglijată la acest nivel.

Pentru aceste sisteme avem deci, cu o aproximaţie suficientă

$$\mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{p}_2 = m_2 \mathbf{v}_2 + \mu \mathbf{v}_1,$$

$$m_1 = m_1^0 / \sqrt{1 - v_1^2/c^2}, \quad m_2 = m_2^0 / \sqrt{1 - v_2^2/c^2},$$

$$\mu = -\frac{1}{2} f \frac{m_1^0 m_2^0}{c^2 r \sqrt{1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2}} \left(1 + \frac{k}{c^2 r}\right),$$

$$H = c^2(m_1 + m_2 + 2\mu),$$

iar ecuaţiile mişcării sînt

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{L}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{L},$$

cu

$$L = 2c^2(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2/c^2)\frac{\mathbf{r}}{r}\mu_r.$$

*Observaţie.* Pentru o distanţă de ordin nuclear a maselor respective, ecuaţiile obţinute mai sus iau o formă specială ţinîndu-se seama de valoarea mică a lui $r$, cum şi de valorile mici ale lui $m_1^0$ şi $m_2^0$.

7. *Determinarea masei de interacţiune dilataţională* $\varkappa$. După determinarea lui $\mu$, condiţia (18) dă ultima relaţie

$$2c^2 \delta_2 \varkappa - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{r} \delta_2 l_1 - \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{r} \delta_2 l_2 = 0, \tag{24}$$

în care masa $\varkappa$ este conţinută în expresiile indicate mai înainte ale lui $l_1$ şi $l_2$,

$$l_1 = h_1 \varkappa, \quad l_2 = h_2 \varkappa.$$

Deci

$$\delta_2 l_2 = h_1 \delta_2 \varkappa + \varkappa \delta_2 h_1, \quad \delta_2 l_2 = h_2 \delta_2 \varkappa + \varkappa \delta_2 h_2. \tag{25}$$

Relaţia (24) devine atunci

$$(2c^2 - h_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r} - h_2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r})\delta_2\varkappa = (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}\cdot\delta_2 h_1 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}\cdot\delta_2 h_2)\varkappa,$$

de unde

$$\left(1 - \frac{h_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r} + h_2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}}{2c^2}\right)\frac{\delta_2\varkappa}{\varkappa} = \frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}\cdot\delta_2 h_1 + \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}\cdot\delta_2 h_2}{2c^2}. \tag{26}$$

Căutînd a da o expresie funcţiilor $h_1$ şi $h_2$ pentru care ecuaţia precedentă să admită o soluţie de forma

$$\varkappa = \psi(r)\Big/\sqrt{1 - \frac{h_1\mathbf{v}_1\mathbf{r} + h_2\mathbf{v}_2\mathbf{r}}{2c^2}}, \tag{27}$$

indicată de relaţia (26), obţinem

$$h_1 = \psi_1(r)\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r}, \quad h_2 = \psi_2(r)\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}, \tag{28}$$

care ne dă, pentru expresia de sub radical,

$$u = \frac{h_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r} + h_2\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r}}{2c^2} = \frac{\psi_1(r)(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{r})^2 + \psi_2(r)(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{r})^2}{2c^2},$$

ceea ce ne obligă, pentru a obţine o valoare reală a lui $\varkappa$, oricare ar fi $r$, să luăm

$$\psi_1(r) = \frac{m_1^0}{m_1^0 + m_0^2}\frac{1}{r^2}, \quad \psi_2(r) = \frac{m_2^0}{m_1^0 + m_2^0}\frac{1}{r^2}. \tag{29}$$

Deci

$$\varkappa = \psi(r)/\sqrt{1-u}, \quad u = \frac{m_1^0 v_1^2\cos^2(\mathbf{v}_1,\mathbf{r}) + m_2^0 v_2^2\cos^2(\mathbf{v}_2,\mathbf{r})}{2(m_1^0 + m_2^0)c^2}, \tag{30}$$

unde $\psi(r)$ rămîne să fie determinată. Observăm acum că, pentru distanţe infragalactice, $\varkappa$ trebuie să fie practic nulă. Valorile ei devin semnificative numai cînd $r$ ia valori cel puţin de ordinul lui $c^2$.

Pentru aceasta, punem

$$\psi(r) = -\frac{1}{2}gl_{12}\left(\frac{r}{c^2}\right)^2, \tag{31}$$

$g$ fiind o constantă universală, $l_{12}$ o caracteristică asociată celor două corpuri în prezenţă.

Aceasta dă, pentru mecanica invariantivă, expresiile

$$H = c^2 m_1 + c^2 m_2 - f\frac{m_1^0 m_2^0}{r\sqrt{1 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2/c^2}}\left(1+\frac{k}{c^2 r}\right) - gl_{12}\frac{r^2}{c^2\sqrt{1-u}}, \tag{32}$$

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}f\frac{m_1^0 m_2^0\mathbf{v}_2}{c^2 r\sqrt{1-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2/c^2}}\left(1+\frac{k}{c^2 r}\right) - \frac{1}{2}gl_{12}\frac{rm_1^0 v_1\cos(\mathbf{v}_1,\mathbf{r})}{(m_1^0+m_2^0)c^4\sqrt{1-u}}\mathbf{r},$$

$$\mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}f\frac{m_1^0 m_2^0\mathbf{v}_1}{c^2 r\sqrt{1 - \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2/c^2}}\left(1+\frac{k}{c^2 r}\right) - \frac{1}{2}gl_{12}\frac{rm_2^0 v_2\cos(\mathbf{v}_2,\mathbf{r})}{(m_1^0+m_2^0)c^4\sqrt{1-u}}\mathbf{r}.$$

8. *Conservarea impulsului şi legea dilataţiei.* Conservarea impulsului, aşa cum rezultă din (7) şi (11), este exprimată de relaţia

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \mu(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) + (h_1+h_2)\times\mathbf{r} = \mathbf{C}. \tag{33}$$

Înmulţind scalar cu $\mathbf{r}$, considerînd expresiile lui $h_1$ şi $h_2$ şi observînd că $\mathbf{v}_j\mathbf{r} = v_j r\cos(\mathbf{v}_j,\mathbf{r}) = r\xi_j$ cu $\xi_j = v_j\cos(\mathbf{v}_j,\mathbf{r})$, relaţia (6) devine după împărţirea prin $r$,

$$m_1\xi_1 + m_2\xi_2 + \mu(\xi_1+\xi_2) + \frac{m_1^0\xi_1+m_2^0\xi_2}{m_1^0+m_2^0}\frac{1}{r^2}\times\mathbf{r}^2 = C\cos(\mathbf{C},\mathbf{r}). \tag{34}$$

Împărţind din nou prin $m_1\xi_1 + m_2\xi_2 - C\cos(\mathbf{C},\mathbf{r})$, cu rezerva ca această expresie să nu fie nulă, situaţie pe care o considerăm, şi punînd în locul lui $\mu$ şi $\times$ expresiile lor (22) şi (27), obţinem ecuaţia

$$1 + \frac{1}{c^2 r}M + \frac{1}{c^4}Nr^2 = 0, \tag{35}$$

unde

$$M = -\frac{1}{2}f\frac{m_1^0 m_2^0}{\sqrt{1-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2/c^2}}\cdot\frac{\xi_1+\xi_2}{m_1\xi_1+m_2\xi_2 - C\cos(\mathbf{C},\mathbf{r})}\left(1+\frac{k}{c^2 r}\right) \tag{36}$$

şi

$$N = -\frac{1}{2}g\frac{l_{12}}{m_1^0+m_2^0}\frac{m_1^0\xi_1+m_2^0\xi_2}{m_1\xi_1+m_2\xi_2 - C\cos(\mathbf{C},\mathbf{r})}\frac{1}{\sqrt{1-u}}.$$

Dacă în (35) derivăm în raport cu $t$ şi împărţim prin $2\frac{r}{c^4}N$, obţinem ecuaţia

$$\frac{c^2}{2r^2}\frac{\dot{M}}{N}+\frac{c^2}{2r^3}\frac{M}{N}\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r}+\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r}+\frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}r=0$$

sau, iarăşi

$$\left(1-\frac{c^2}{2r^3}\frac{M}{N}\right)\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r}=-\frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}r\left(1+\frac{c^2}{r^3}\frac{\dot{M}}{\dot{N}}\right). \tag{37}$$

Ştiind că

$$\frac{\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}}{r}=v_2\cos(\mathbf{v}_2,\ \mathbf{r})-v_1\cos(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{r}),$$

ecuaţia (37) capătă forma

$$|v_2\cos(\mathbf{v}_2,\ \mathbf{r})-v_1\cos(\mathbf{v}_1,\ \mathbf{r})|=\frac{1}{2}\left|\frac{\dot{N}}{N}\right|\left|\frac{1+\dfrac{c^2}{r^3}\dfrac{\dot{M}}{\dot{N}}}{1-\dfrac{c^2}{2r^3}\dfrac{M}{\dot{N}}}\right|r, \tag{38}$$

care constituie, pînă la aproximaţia cu totul neglijabilă provenită din lăsarea la o parte a termenului corectiv al gravitaţiei, o lege exactă a mecanicii sistemului izolat constituit de două puncte, în mişcare inerţială.

*Observaţie.* În capitolul care tratează despre aspectele cosmologice ale mecanicii, reexaminăm aceeaşi problemă pentru întreg sistemul galaxiilor Universului, considerîndu-le ca puncte materiale în mişcare inerţială. Cu acel prilej examinăm mai de aproape termenii care figurează în membrul doi al formulei (38) şi arătăm că, dacă este vorba de galaxii, acest membru se reduce numai la expresia $\frac{1}{2}\left|\frac{\dot{N}}{N}\right|r$, unde $\frac{\dot{N}}{N}$ nu mai depinde explicit de $r$, regăsindu-se astfel *legea lui Hubble.*

## § 2. Interpretarea newtoniană. Două legi universale de interacţiune

Principiile mecanicii invariantive au condus la următoarea expresie a energiei sistemului inerţial constituit de două corpuri:

$$H=c^2m_1+c^2m_2-f\frac{m_1^0m_2^0}{r\sqrt{1-\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2/c^2}}\left(1+\frac{k}{c^2r}\right)-gl_{12}\frac{r^2}{c^2}\Big/\sqrt{1-u}.$$

În limbaj newtonian cei doi termeni din urmă ai acestei expresii trebuie interpretați ca *potențiali*: cel dintîi este, pentru viteze curente, egal cu *potențialul gravitațional* clasic, cel de-al doilea, în aceleași condiții, este *un potențial elastic*, în ce privește dependența de $r$.

Aceasta revine la a spune, cu o aproximație care se poate evalua, că:

*Între două corpuri oarecare ale Universului se exercită două forțe de interacțiune inerțială, o forță de atracție reciprocă, care este gravitatea, a cărei parte principală este invers proporțională cu pătratul distanței, și o forță elastică, de respingere, proporțională cu distanța, foarte slabă chiar la distanțe de ordin planetar.*

Acestei forțe din urmă se datorește în mod predominant efectul lui Hubble, așa cum rezultă din legea conservării impulsului, care are drept consecință directă formula (38) de la paragraful anterior.

Capitolul IV

# MECANICA INVARIANTIVĂ A SISTEMELOR CONTINUE

## § 1. Principii

Principiile care guvernează relaţiile caracteristice ale unui sistem continuu sînt reprezentate de următoarele cerinţe, ce duc mai departe programul ce a fost realizat în cazul unui punct material singur, al unui sistem finit de puncte materiale, precum şi a ceea ce am numit particule stabile.

1°. Sistemul continuu luat în consideraţie este presupus a fi compus din părţi ale căror dimensiuni sînt suficient de mici pentru a fi asimilate cu o particulă stabilă în înţelesul ce i-am dat în capitolul II.

2°. Stabilirea relaţiilor de mişcare proprie pentru fiecare dintre aceste componente. Aceasta a fost realizat în capitolul II.

3°. Stabilirea relaţiilor între mărimile caracteristice mişcării luînd în consideraţie constrîngerile la care componentele sînt supuse în cadrul sistemului.

4°. Combinarea relaţiilor precedente într-una singură cu ajutorul coeficienţilor lagrangieni, corespund structurii sistemului, în forma $\omega_8^{(i)} + \delta S$, $\omega_8^{(i)}$ privind relaţiile inerţiale interioare, iar $\delta S$ pe cele la frontiera sistemului dacă este cazul.

5°. Stabilirea expresiei elementare $D\omega_8^{(p)}$ corespunzătoare cîmpului, cînd acesta există.

6°. Scrierea constrîngerilor externe executate la frontiera sistemului, fie incluzîndu-le, dacă se poate, în $D\omega_8^{(p)}$, fie asociind acesteia un termen adiţional $\delta S^{(p)}$.

7°. Să se stabilească ecuaţiile mişcării şi ecuaţia energiei din relaţia $D(\Omega_8^{(i)} + \delta S) = D(\Omega_8^{(p)} + \delta S^{(p)})$.

În ceea ce urmează ne ocupăm numai de cerinţele privind relaţiile interioare, lăsînd condiţiile de frontieră pentru cercetări specifice diferitelor tipuri de sisteme continue.

## § 2. Mişcarea pur inerţială a componentelor

1. Fie $D^\circ$ domeniul finit şi simplu conex din $E_3$ ocupat de sistemul continuu $C$ la momentul $t = 0$ cu $S^\circ$ frontiera sa spaţială, $D$ domeniul ocupat de $C$ la momentul $t > 0$ şi $S$ frontiera respectivă.

Indicăm prin $\xi$ poziția la momentul $t$ a unui punct generic al sistemului care la momentul $t = 0$ a ocupat poziția $\xi^\circ$. Notăm cu $\dot{\xi}$ viteza sa și cu $\dot{\xi}_1$, $\dot{\xi}_2$, $\dot{\xi}_3$ componentele sale față de un reper euclidian determinat.

Considerăm acum în $D^\circ$ un domeniu simplu conex $d^\circ$ avînd o suprafață simplă, regulată, închisă $s^\circ$, mărimea lui $d^\circ$ fiind așa de redusă incît partea din corp care o ocupă la momentul $t = 0$ să poată fi considerată de-a lungul timpului ca o particulă stabilă; $d$ și $s$ vor fi ceea ce devin $d^\circ$ și $s^\circ$ la momentul $t$ prin efectul mișcării.

Forma generatoare a relațiilor mișcării inerțiale pure va fi, așa cum rezultă din principiile enunțate,

$$\Omega_\delta^{(i)} = \int_d (\dot{\xi}\delta\xi - h\delta t)\mathrm{d}m,$$

unde $h$ este energia pentru unitatea de masă a punctului material $(\xi, t)$ avînd masa $\mathrm{d}m$.

Folosind rezultatele privind particula materială stabilă avem

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{x}},$$

$$m = \int_d \mathrm{d}m = \sqrt{m_0^2 + \frac{2}{c^2}\left(\alpha + \sum_j u_j\omega_j + \sum_j v_j\varphi_j\right)},$$

$$\Omega_\delta^{(i)} = \mathbf{p}\delta\mathbf{x} + \Sigma\dot{\theta}_j\delta\alpha_j - mc^2\delta t,$$

$\mathbf{x}$ fiind vectorul poziție al centrului de masă,

$$\alpha = \frac{1}{2}p^2,$$

$$\omega_j = \frac{1}{2}\theta_j^2,$$

$$\delta\varphi_1 = \theta_2\delta\theta_3 - \theta_3\delta\theta_2, \quad \delta\varphi_2 = \theta_3\delta\theta_1 - \theta_1\delta\theta_3,$$

$$\delta\varphi_3 = \theta_1\delta\theta_2 - \theta_2\delta\theta_1,$$

iar coeficienții $u_1$, $u_2$, $u_3$; $v_1$, $v_2$, $v_3$ depind numai de structura spațială a sistemului și nu de poziția lui.

Este limpede că pentru sistemele continue cu dimensiuni mici și cu viteza de translație și rotație nu prea mari avem

$$m = m_0.$$

Sub aceste condiţii principiul fundamental $D\Omega_\delta^{(i)} = 0$ ne dă relaţia caracteristică *mişcării pure*

$$\rho \frac{d\varphi}{dt} \delta \mathbf{x} + \rho \sum_j \frac{d\theta_j}{dt} \delta \alpha_j - \rho \frac{dh}{dt} \delta t = 0, \tag{1}$$

unde

$$\varphi = \mathbf{v},$$

în cazul fluidelor şi

$$\varphi = \frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

**u** fiind *vectorul deplasare*, pentru corpurile elastice sau plastice.

## § 3. Relaţiile între mărimile de mişcare rezultînd din constrîngerile interne ale sistemului

### 1. Relaţii interne

a) *Stabilitatea expansiunii.* Principiul pe care-l numim al *stabilităţii expansiunii* cere stabilitatea expresiei, pe care o formulăm pentru mai multă simplicitate sub forma integrală referitoare la poziţia iniţială

$$\mathscr{E}_d = \int_{d_0} \operatorname{div} \varphi \cdot a(\xi, \alpha, t) d\tau_0, \tag{1}$$

unde vectorul $\varphi$ este viteza **v** pentru fluide sau deplasarea **u** pentru corpuri elastice.

Multiplicatorul $a(\xi, \alpha, t)$ este introdus pentru a caracteriza neomogeneitatea mediului.

Mărimile $\varphi$, $\xi$, şi $\alpha$ sînt considerate la momentul $t$ şi depind, în virtutea legilor mişcării, de datele iniţiale.

Condiţia de stabilitate cere să avem

$$\delta \mathscr{E}_d = 0,$$

adică

$$\int_{d_0} \delta(a \cdot \operatorname{div} \varphi) d\tau_0 = 0. \tag{2}$$

Însă

$$\delta(a \operatorname{div} \varphi) = \operatorname{grad}_\xi (a \operatorname{div} \varphi) \delta \xi + \operatorname{grad}_\alpha (a \operatorname{div} \varphi) \delta \alpha + \frac{\delta}{\delta t} (a \operatorname{div} \varphi) \delta t$$

şi

$$\delta \xi = \delta \mathbf{x} + \mathbf{r} \times \delta \alpha,$$

deci egalitatea (2) devine

$$\mathbf{L}\cdot\delta\mathbf{x}+\mathbf{M}\cdot\delta\boldsymbol{\alpha}+N\delta t=0 \tag{3}$$

cu

$$\mathbf{L}=\int_{d_0}\operatorname{grad}_{\xi}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\,\mathrm{d}\tau_0=\int_{d}\operatorname{grad}_{\xi}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\,\Delta\mathrm{d}\tau,$$

$$\mathbf{M}=\int_{d}[\operatorname{grad}_{\xi}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\times\mathbf{r}+\operatorname{grad}_{\alpha}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})]\Delta\mathrm{d}\tau,\quad N=\int_{d}\frac{\partial}{\partial t}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\Delta\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

unde $\Delta=\dfrac{\mathrm{d}\tau_0}{\mathrm{d}\tau}$ este determinantul funcţional al transformării care duce coordonatele iniţiale la coordonatele la momentul $t$.

Dacă împărţim primul membru din (3) cu $\int_d\Delta\mathrm{d}\tau$ şi dacă $d$ se strînge în jurul centrului de masă $\mathbf{x}$, relaţia devine la limită

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\,\delta\mathbf{x}+\operatorname{grad}_{\alpha}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\,\delta\boldsymbol{\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\,\delta t=0, \tag{5}$$

*în cazul regulat* cînd $\operatorname{grad}_{\xi}(a\operatorname{div}\boldsymbol{\varphi})\times\mathbf{r}\to 0$. Această relaţie ia forma

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(a\operatorname{div}\mathbf{u})\delta\mathbf{x}+\operatorname{grad}_{\alpha}(a\operatorname{div}\mathbf{u})\,\delta\boldsymbol{\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}(a\operatorname{div}\mathbf{u})\,\delta t=0, \tag{6}$$

pentru corpurile elastice şi forma

$$\operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(a\operatorname{div}\mathbf{v})\,\delta\mathbf{x}+\operatorname{grad}_{\alpha}(a\operatorname{div}\mathbf{v})\,\delta\boldsymbol{\alpha}+\frac{\partial}{\partial t}(a\operatorname{div}\mathbf{v})\,\delta t=0 \tag{7}$$

pentru fluide.

b) *Stabilitatea la compresibilitate.* Compresiunea în domeniul $d$ este exprimată prin integrala

$$\Gamma_d=\int_{d_0}p(\boldsymbol{\xi},t)\cdot b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha},t)\,\mathrm{d}\tau_0,$$

unde $p(\boldsymbol{\xi},t)$ este presiunea şi $b(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha},t)$ o caracteristică de neomogeneitate relativă la repartiţia în spaţiu şi timp a compresibilităţii în jurul punctului $\boldsymbol{\xi}$.

Printr-o procedură similară ca în cazul expansiunii, stabilitatea caracterizată prin

$$\delta\Gamma_d=0$$

ne dă relaţia

$$\text{grad}_x(bp)\delta\mathbf{x} + \text{grad}_\alpha(bp)\ \delta\alpha + \frac{\partial}{\partial t}(bp)\ \delta t = 0. \tag{8}$$

*Acestei relaţii trebuie să mai adăugăm aceea de stare care leagă pre siunea p cu densitatea ρ şi care depinde de natura mediului.*

c) *Relaţia care exprimă efectul de viscozitate.* Odată cu *expansiunea* care este reprezentată de div **u** şi cu compresiunea exprimată prin mări mea *p* şi bineînţeles cu ecuaţia de stare s-au completat mărimile olo nome de stare. Rămîne numai de găsit relaţia de viscozitate corespun zînd fluxului de materie prin suprafaţa domeniului *d*.

Pentru a obţine o formă cît mai completă a acestui flux $\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma$ cu $\varphi = \mathbf{v}$ pentru fluide şi $\varphi = \mathbf{u}$ pentru corpuri elastice, introducem matrice

$$(A) = I + (\omega_{ij}(\xi, \alpha, t))_{i,j=1,2,3}$$

caracteristică a microstructurii materialului. $I$ este matricea unitate

Expresia fluxului devine atunci $\frac{d\varphi}{dn}\cdot(A)\,d\sigma$. Dacă mai comple tăm cu partea temporală sub forma componentei normale $\mathbf{W}_n$ a unu vector $\mathbf{W}(x, t)$, condiţia ce trebuie să avem în vedere poate fi scrisă

$$\int_d \left(\frac{d\varphi}{dn}(A)\ \delta\mathbf{x} + \mathbf{W}_n\delta t\right) d\sigma = 0.$$

Aplicînd formula lui Gauss obţinem

$$\int_d \left[\sum_h \left(\Delta\varphi_h + \sum_{j,k}\left(\omega_{jk}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_h}\right)\right)\delta x_h + \text{div}\ \mathbf{W}\,\delta t\right] d\tau = 0.$$

Împărţind în $\int_d d\tau$ şi trecînd la limită obţinem relaţia caracteristică a viscozităţii :

$$(\Delta\varphi + \theta)\ \delta\mathbf{x} + \text{div}\ \mathbf{W}\ \delta t = 0. \tag{9}$$

Relaţia aceasta devine

$$(\Delta\mathbf{u} + \theta)\ \delta\mathbf{x} + \text{div}\ \mathbf{W}\cdot\delta t = 0 \tag{10}$$

pentru solide elastice şi

$$(\Delta\mathbf{v} + \theta)\delta\mathbf{x} + \text{div}\mathbf{W}\,.\,\delta t = 0 \tag{11}$$

pentru fluide.

d) *Compunerea relațiilor de mișcare într-una singură.* Aplicăm procedeul lagrangean, combinînd relațiile precedente între elementele mișcării, cu ajutorul coeficienților

$$\lambda = \lambda(\mathbf{x}, t), \quad \mu = \mu(\mathbf{x}, t), \quad \nu = \nu(\mathbf{x}, t)$$

care diferă de la un material la altul și pot sau nu varia de la un punct la altul, de la un moment la altul.
Relația care rezultă asociind (1), (7), (11) ia forma

$$\mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\boldsymbol{\alpha} - \mathrm{C}.\,\delta t = 0, \tag{12}$$

unde

$$\mathbf{A} = \rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \lambda\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) - \mu\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}(bp) - \nu(\Delta\mathbf{v} + \boldsymbol{\theta}), \tag{13}$$

$$\mathbf{B} = \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} - \lambda\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) - \mu\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(bp), \tag{14}$$

$$C = \rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \lambda\frac{\partial}{\partial t}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) + \mu\frac{\partial}{\partial t}(bp) + \nu\,\mathrm{div}\,\mathbf{W} \tag{15}$$

și privește *fluidele.*
Relația care rezultă din asociația între (1), (6), (8) și (10) are forma

$$D\Omega_{\delta}^{(1)} = \mathbf{A}^*\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}^*\cdot\delta\boldsymbol{\alpha} - C^*\delta t = 0, \tag{16}$$

unde

$$\mathbf{A}^* = \rho\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2} - \lambda\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) - \mu\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}(bp) - \nu(\Delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\theta}), \tag{17}$$

$$\mathbf{B}^* = \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} - \lambda\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) - \mu\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(bp), \tag{18}$$

$$C^* = \rho\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \lambda\frac{\partial}{\partial t}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}) + \mu\frac{\partial}{\partial t}(bp) + \nu\,\mathrm{div}\,\mathbf{W} \tag{19}$$

și privește *corpurile elastice.*

## 2. Expresia $D\Omega_{\delta}^{(p)}$ a cîmpului

Cîmpul este definit de un vector spațial $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ și de un potențial scalar $a_0$.
Forma potențială elementară este deci

$$\omega_{\delta}^{(p)} = \mathbf{a}(\xi, t)\delta\xi - a_0(\xi, t)\delta t, \tag{20}$$

iar forma corespunzătoare componentei cuprinsă în $d$ este

$$\Omega_\delta^{(p)} = \int_d (\mathbf{a}(\xi, t)\delta\xi - a_0(\xi, t)\delta t)\mathrm{d}\mu, \tag{20'}$$

unde elementul de masă $\mathrm{d}\mu$ este de natura cîmpului : masă materială, sarcină electrică sau altfel de masă.

Dacă aplicăm lui $\Omega_\delta^{(p)}$ tratamentul indicat obţinem

$$\Omega_\delta^{(p)} = \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta\boldsymbol{\alpha} - C\delta t, \tag{21}$$

unde

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, t), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, t), \quad C = C(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}, t)$$

reprezintă componentele potenţialului rezultat din $(\mathbf{a}, a_0)$. Calculînd derivata exterioară (Cartan) a formei $\Omega_\delta^{(p)}$ obţinem

$$D\Omega_\delta^{(p)} = \mathbf{P}\delta\mathbf{x} + \mathbf{Q}\delta\boldsymbol{\alpha} - R\delta t, \tag{22}$$

unde componentele $P_j (j = 1, 2, 3)$ ale lui $\mathbf{P}$, componentele $Q_j$ ale lui $\mathbf{Q}$ şi $R$ au următoarele expresii

$$\begin{aligned}
P_j &= \frac{\mathrm{d}A_j}{\mathrm{d}t} - \sum_h \frac{\partial A_h}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_h}{\mathrm{d}t} - \sum_h \frac{\partial B_h}{\partial x_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial b}{\partial x_j} \\
Q_j &= \frac{\mathrm{d}B_j}{\mathrm{d}t} - \sum_h \frac{\partial A_h}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}x_h}{\mathrm{d}t} - \sum_h \frac{\partial B_h}{\partial \alpha_j}\frac{\mathrm{d}\alpha_h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial b}{\partial \alpha_j} \\
R &= \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} + \sum_h \frac{\partial A_h}{\partial t}\frac{\mathrm{d}x_h}{\mathrm{d}t} + \sum_h \frac{\partial B_h}{\partial t}\frac{\mathrm{d}\alpha_h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial b}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{23}$$

### 3. Ecuaţiile mişcării

Ecuaţiile mişcării se obţin ca aplicaţie a principiilor mecanicii invariantive, din egalitatea

$$D\Omega_\delta^{(i)} + \delta S'^{(i)} = D\Omega_\delta^{(p)} + \delta S'^{(p)} \tag{24}$$

pentru orice $\delta\mathbf{x}$, $\delta\boldsymbol{\alpha}$, $\delta t$, în masa corpului şi la frontiera sa.

Folosind (12) şi (13) urmează că ecuaţiile *mişcării fluidului* sînt

$$\begin{aligned}
&\rho\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \lambda\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) - \mu\,\mathrm{grad}_{\mathbf{x}}(bp) - \nu(\Delta\mathbf{v} + \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P} + \mathbf{P}^{(e)}, \\
&\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} - \lambda\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(a\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}) - \mu\,\mathrm{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(bp) = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{(e)},
\end{aligned} \tag{25}$$

ecuaţia bilanţului energetic fiind

$$\rho \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \lambda \frac{\partial}{\partial t}(a \operatorname{div} \mathbf{v}) + \mu \frac{\partial}{\partial t}(bp) + \nu \operatorname{div} \mathbf{W} = R + R^{(e)}. \tag{26}$$

Folosind ecuaţia (11) obţinem pentru mişcarea unui corp elastic ecuaţiile

$$\begin{aligned} &\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \lambda \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(a \operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{grad}_{\mathbf{x}}(bp) - \nu(\Delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{P} + \mathbf{P}^{(e)}, \\ &\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t} - \lambda \operatorname{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(a \operatorname{div} \mathbf{u}) - \mu \operatorname{grad}_{\boldsymbol{\alpha}}(bp) = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^{(e)}, \end{aligned} \tag{27}$$

iar pentru energie egalitatea

$$\rho \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \lambda \frac{\partial}{\partial t}(a \operatorname{div} \mathbf{u}) + \mu \frac{\partial}{\partial t}(bp) + \nu \operatorname{div} \mathbf{W} = R + R^{(e)}. \tag{28}$$

În expresiile precedente $h$ reprezintă energia proprie pe unitatea de masă propriu zisă. Întrucît în cazul fluidelor ordinare sau a corpurilor elastice sau plastice obişnuite, vitezele implicate sînt mici faţă de viteza luminii, energia $h$ se reduce la energia cinetică pentru unitatea de masă. Observăm de asemenea, ţinînd seamă de caracterul specific al deformării $\mathbf{u}$, că putem pune, în general $\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \dfrac{\mathrm{d}^2 \mathbf{u}}{\mathrm{d}t^2}$.

$\mathbf{P}^{(e)}$, $\mathbf{Q}^{(e)}$ şi $R^{(e)}$ sînt explicate în cele ce urmează.

## § 4. Constrîngerile externe

1. *Ecuaţiile mişcării* derivate din (24) sînt valabile dacă una dintre condiţiile care urmează este verificată:

— constrîngerile externe sînt nule.

— constrîngerile externe sînt încorporate cîmpului.

În primul caz nu mai este nimic de adăugat. Al doilea caz cere oarecare explicaţie.

Observăm că integrala

$$\int_D (\mathbf{P}\delta\mathbf{x} + \mathbf{Q}\delta\boldsymbol{\alpha} - R\delta t)\mathrm{d}\tau$$

care figurează şi în (29) şi în (30) poate fi considerată ca un lucru mecanic în spaţiul variabilelor $x_1$, $x_2$, $x_3$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $t$, presupunînd că atribuim sistemului $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $R$, semnificarea unei forţe generalizate. Ar

fi lucrul mecanic efectuat de sistemul continuu sub efectul cîmpului asupra întregii mase considerate.

Şi constrîngerile exterioare acţionînd la suprafaţa lui $D$ dau un lucru mecanic pentru orice parte din $S$. Dar orice lucru mecanic efectuat în punctele suprafeţei este reprezentat de o integrală de suprafaţă care se poate totdeauna transforma după regulile cunoscute într-o integrală de volum:

$$\int_S (\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\delta\boldsymbol{\alpha} - K\delta t)\,\mathrm{d}\sigma = \int_D (\mathbf{P}^{(e)}\delta\mathbf{x} + \mathbf{Q}^{(e)}\delta\boldsymbol{\alpha} - R^{(e)}\delta t)\,\mathrm{d}\tau,$$

unde $\mathbf{P}^{(e)}$, $\mathbf{Q}^{(e)}$, $R^{(e)}$ au doar semnificaţii convenţionale. Această echivalenţă care transformă relaţia privind constrîngerile externe într-una de constrîngeri interne realizează posibilitatea aplicării principiilor precedente aşa ca legea de mişcare să implice şi condiţiile de frontieră.

2. *O formă integrală a ecuaţiilor mişcării.* Calculele efectuate pînă acum privesc fiece parte $d$ a sistemului continuu considerat, lăsînd impresia că ele reprezintă numai consideraţii locale ale mişcării.

Ar părea atunci că după teoria noastră sistemul nu intervine în totalitatea sa decît prin efectul condiţiilor de frontieră şi că, dacă n-ar exista constrîngeri la suprafaţa corpului elastic, de pildă, mişcarea fiecărei componente ar fi independentă de a celorlalte. Concluzia aceasta nu este justă şi anume pentru următoarele motive:

Expansiunea, compresiunea şi efectul de viscozitate care au intervenit în stabilirea legilor de mişcare sînt datorite influenţei asupra componentei $d$ a tuturor celorlalte părţi ale corpului. Dacă aceste influenţe ar înceta, prezenţa lor în ecuaţiile mişcării ar dispare şi ea şi coeficienţii $\lambda$, $\mu$ sau $\nu$ ar fi nuli. Prin urmare prezenţa acestor coeficienţi marchează interacţiunile între diversele părţi ale corpului.

Aceste observaţii arată rolul important ce au $\lambda$, $\mu$ şi $\nu$, caracteristice esenţiale ale sistemului continuu şi cer un examen adîncit asupra expresiei şi semnificaţiei lor.

Aşa, de pildă, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ pot reprezenta prezenţa stressului în cuprinsul materialului elastic.

Pentru anume materiale plastice putem considera pe $\lambda$, $\mu$, $\nu$ ca distribuţii în loc de funcţii. Dar atunci mult mai utilă este forma integrală a ecuaţiilor.

Păstrînd acestor ecuaţii forma integrală şi ţinînd seama şi de constrîngerile externe ecuaţiile vor fi

$$\int_D [(\mathbf{A} - \mathbf{P} - \mathbf{P}^{(e)})\delta\mathbf{x} + (\mathbf{B} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{(e)})\delta\boldsymbol{\alpha} - (C - R - R^{(e)})\delta t]\mathrm{d}\tau = 0 \qquad (29)$$

pentru *fluide*, şi

$$\int_D [(\mathbf{A}^* - \mathbf{P} - \mathbf{P}^{(e)})\delta\mathbf{x} + (\mathbf{B}^* - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^{(e)})\delta\boldsymbol{\alpha} - (C^* - R - R^{(e)})\delta t]\,\mathrm{d}\tau = 0 \qquad (30)$$

pentru *corpurile elastice* sau alte corpuri deformabile.

## § 5. Cîmpuri în general

În consideraţiile ce preced am considerat cîmpuri care derivă dintr-un *potenţial* ($\mathbf{a}$, $a_0$) (constituit dintr-un vector şi un scalar pe care l-am numit impropriu un cvadrivector).

Dar în acest fel sîntem foarte departe de cazul general tratat în mecanica newtoniană. Considerarea cazului general al cîmpurilor care generalizează cîmpurile de forţă newtoniene, se face exact în acelaşi mod ca pentru punctul material izolat.

1. *Influenţa căldurii.* Ca şi pentru partea care precedă în această teorie mecanică a mediilor continue ordinare, în care masele dinamice sînt identice cu cele în repaus, scopul dezvoltărilor realizate n-a fost decît prezentarea unitară a ecuaţiilor în general asemenea celor ale teoriei clasice. Acelaşi lucru se petrece şi pentru cazul pe care pînă acum l-am lăsat la o parte cînd intervine căldura.

Ea se manifestă prin prezenţa unui vector energie $\mathbf{W}$, corespunzînd unei forţe de masă care derivă dintr-un potenţial proporţional cu temperatura. Dacă punem

$$\mathbf{W} = -\chi \operatorname{grad} T,$$

unde temperatura $T$ este un potenţial scalar determinat în fiece punct al masei materiale şi la fiece moment,

$$T = T(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t),$$

$\mathbf{W}$ este fluxul de căldură pentru unitatea de masă.

Aşa cum a arătat Fourier, variaţia căldurii care trece printr-un element de suprafaţă $s$ în unitatea de timp este proporţională cu derivata normală a temperaturii şi cu suprafaţa $s$, valoarea sa este deci

$$\chi \frac{\partial T}{\partial n} s,$$

unde $\chi$ este coeficientul de conductivitate internă a masei. Expresia precedentă explică şi natura şi semnul lui $\chi$. Folosirea acestor mărimi în mecanica invariantivă nu diferă de folosirea lor în mecanica clasică.

## Capitolul V

# SISTEMUL A DOUĂ CORPURI (CORPUSCULE STABILE)

## § 1. Mișcarea inerțială a unui sistem de două corpuri

1. *Introducere.* Dacă cele două corpuri a căror mișcare este de studiat sînt, de pildă, soarele și o planetă, reprezentarea lor ca puncte materiale nu este suficientă pentru a ne da seama exact de toate aspectele mișcării lor. De aceea este necesar să considerăm aceste corpuri ca solide — în înțelesul ce am precizat în capitolul II — în mișcare de translație și rotație pentru a obține o mai bună apropiere de situația reală.

2. *Un solid* în sensul capitolului II este o particulă stabilă cu masa dinamică

$$m = \sqrt{m_0^2 + \frac{1}{c^2}(\alpha + \sum_j u_j\omega_j + \sum_j v_j\varphi_j}, \tag{1}$$

unde $\alpha = \frac{1}{2} m^2\mathbf{v}^2$, $\omega_j = \frac{1}{2}\theta_j^2$, iar $\varphi_j$ sînt mărimi neolonome definite de relațiile

$$\delta\varphi_1 = \theta_2\delta\theta_3 - \theta_3\delta\theta_2; \quad \delta\varphi_2 = \theta_3\delta\theta_1 - \theta_1\delta\theta_3; \quad \delta\varphi_3 = \theta_1\delta\theta_2 - \theta_2\delta\theta_1$$

și pentru care

$$\sum_j u_j\delta\omega_j + \sum_j v_j\delta\varphi_j = m\sum_j \dot{\alpha}_j\delta\theta_j, \tag{2}$$

unde $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ sînt unghiurile care definesc orientarea corpului și $\theta$ impulsurile unghiulare respective, legate de cele dintîi prin relațiile

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= (l_{22} + l_{33})\,\dot{\alpha}_1 - l_{12}\dot{\alpha}_2 + l_{13}\dot{\alpha}_3,\\
\theta_2 &= l_{21}\dot{\alpha}_1 + (l_{33} + l_{11})\,\dot{\alpha}_2 - l_{23}\dot{\alpha}_3,\\
\theta_3 &= -l_{31}\dot{\alpha}_1 + l_{32}\dot{\alpha}_2 + (l_{11} + l_{22})\,\dot{\alpha}_3,
\end{aligned} \tag{3}$$

unde am pus

$$l_{jk} = \int_C \zeta_j\zeta_\kappa\,\mathrm{d}m, \tag{4}$$

$\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$ fiind componentele vectorului $\boldsymbol{\rho} - \mathbf{x}$, $\boldsymbol{\rho}$ fiind vectorul poziţie a unui punct generic al corpului, iar $\mathbf{x}$ vectorul poziţie al centrului de greutate. Fiind dat că masa $m = \int_C \mathrm{d}m$ este variabilă, presupunem că $\frac{1}{m} l_{jk}$ sînt constante în timpul mişcării.

3. *Sistemul inerţial a două corpuri.* Fie acum un sistem de două corpuri $C_1$ şi $C_2$ de tipul precedent, $\mathbf{x}_1$ şi $\mathbf{x}_2$ vor fi centrele lor de masă şi $\boldsymbol{\alpha}_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3})$, $i = 1, 2$, rotaţiile lor. Momentele şi impulsurile respective vor fi reprezentate de vectorii $\mathbf{p}_i$ şi $\boldsymbol{\theta}_i (i = 1, 2)$.

Invarianţii care fixează poziţia dinamică a sistemului, în afară de o schimbare euclidiană a reperului, sînt

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_1^2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}\mathbf{p}_2^2, \quad \alpha = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2, \quad \beta_1 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}, \quad \beta_2 = \mathbf{p}_2 . \mathbf{r}, \quad \beta = \frac{1}{2}\mathbf{r}^2, \tag{5}$$

unde $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ şi

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_1^2, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\theta}_2^2, \quad \gamma = \boldsymbol{\theta}_1 \cdot \boldsymbol{\theta}_2, \quad \varepsilon_1 = \boldsymbol{\theta}_1 \cdot \mathbf{r}, \quad \varepsilon_2 = \boldsymbol{\theta}_2 . \mathbf{r}.$$

Energia $H$ a sistemului întreg este, *în principiu*, un invariant al sistemului, este deci o funcţie a invarianţilor precedenţi :

$$H = H(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta, \gamma_1, \gamma_2, \gamma; \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

de unde, după ce punem $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1$ rezultă

$$\begin{aligned}\delta H = {} & H_{\alpha_1}\mathbf{p}_1 \cdot \delta\mathbf{p}_1 + H_{\alpha_2}\mathbf{p}_2 \cdot \delta\mathbf{p}_2 + H_{\alpha}\mathbf{p}_2\delta\mathbf{p}_1 + H_{\alpha}\mathbf{p}_1 \cdot \delta\mathbf{p}_2 + H_{\beta_1}\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{p}_1 + \\ & + H_{\beta_1}\mathbf{p}_1(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) + H_{\beta_2}\mathbf{r}\delta\mathbf{p}_2 + H_{\beta_2}\mathbf{p}_2(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) + H_{\gamma_1}\boldsymbol{\theta}_1\delta\boldsymbol{\theta}_1 + \\ & + H_{\gamma_2}\theta_2\delta\theta_2 + H_{\gamma}\boldsymbol{\theta}_2 \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_1 + H_{\gamma}\boldsymbol{\theta}_1 \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_2 + H_{\beta}\mathbf{r}(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) + \\ & + H_{\varepsilon_1}\mathbf{r}\delta\boldsymbol{\theta}_1 + H_{\varepsilon_1}\boldsymbol{\theta}_1(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) + H_{\varepsilon_2}\mathbf{r} \cdot \delta\boldsymbol{\theta}_2 + H_{\varepsilon_2}\boldsymbol{\theta}_2(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1).\end{aligned}$$

Forma inerţială a sistemului, după principiile mecanicii invariantive, este

$$\omega_\delta^{(i)} = \mathbf{p}_1\delta\mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2\delta\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\theta}_1\delta\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\theta}_2\delta\boldsymbol{\alpha}_2 - H\delta t. \tag{6}$$

Dacă anulăm coeficienţii variaţiilor $\delta\mathbf{x}_1$ şi $\delta\mathbf{x}_2$ în derivata Cartan a lui $\omega_\delta^{(i)}$ adică în $\mathrm{d}\omega_\delta^{(i)} - \delta\omega_\mathrm{d}^{(i)}$ obţinem, după împărţirea cu $\mathrm{d}t$, ecuaţiile

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_1}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{M}; \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_2}{\mathrm{d}t} = \mathbf{M}, \tag{7}$$

unde

$$\mathbf{M} = H_{\beta}\mathbf{r} + H_{\beta_1}\mathbf{p}_1 + H_{\beta_2}\mathbf{p}_2 + H_{\varepsilon_1}\boldsymbol{\theta}_1 + H_{\varepsilon_2}\boldsymbol{\theta}_2, \tag{8}$$

ceea ce dă imediat integrala primă a conservării impulsului

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{C}. \tag{9}$$

Dacă anulăm coeficienţii lui $\delta t$, $\delta\boldsymbol{\alpha}_1$, $\delta\boldsymbol{\alpha}_2$, obţinem al treilea grup de legi de conservare

$$H = H_0 \tag{10}$$

*conservarea energiei* şi

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_1^0, \quad \boldsymbol{\theta}_2 = \boldsymbol{\theta}_2^0 \tag{11}$$

*conservarea impulsurilor unghiulare.*
Anulînd coeficienţii lui $\delta\mathbf{p}_1$, $\delta\mathbf{p}_2$, $\delta\boldsymbol{\theta}_1$, $\delta\boldsymbol{\theta}_2$, obţinem relaţiile care leagă impulsurile de vitezele respective $\left(\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}_i\right)$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= H_{\alpha_1}\mathbf{p}_1 + H_{\alpha}\mathbf{p}_2 + H_{\beta_1}\mathbf{r}, \\ \mathbf{v}_2 &= H_{\alpha_2}\mathbf{p}_2 + H_{\alpha}\mathbf{p}_1 + H_{\beta_2}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{12}$$

şi

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 &= H_{\gamma_1}\boldsymbol{\theta}_1 + H_{\gamma}\boldsymbol{\theta}_2 + H_{\varepsilon_1}\mathbf{r}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 &= H_{\gamma_2}\boldsymbol{\theta}_2 + H_{\gamma}\boldsymbol{\theta}_1 + H_{\varepsilon_2}\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{13}$$

Inversarea relaţiilor (12), condiţionată de a avea $H_{\alpha_1}H_{\alpha_2} - H_{\alpha}^2 \neq 0$, ceea ce va fi evident verificat pînă la urmă, ne dă

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= m_1\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 + h_1\nu\mathbf{r}, \\ \mathbf{p}_2 &= m_2\mathbf{v}_2 + \mu\mathbf{v}_1 + h_2\nu\mathbf{r}, \end{aligned} \tag{14}$$

unde $m_1$ şi $m_2$ sînt masele celor două corpuri, $\mu$ masa de interacţiune gravitaţională şi $\nu$ aceea de interacţiune dilataţională care nu este sensibilă decît la distanţe de ordin galactic.

Inversarea, sub condiţia $H_{\gamma_1}H_{\gamma_2} - H_{\gamma}^2 \neq 0$, a relaţiilor (13) ne dă expresia impulsurilor unghiulare care ştim, dealtfel, că sînt constante

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}_1 &= \lambda_1\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 - \mu^*\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 + k_1\nu^*\mathbf{r}, \\ \boldsymbol{\theta}_2 &= \lambda_2\dot{\boldsymbol{\alpha}}_2 - \mu^*\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 + k_2\nu^*\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{15}$$

Sistemele (14) şi (15) sînt scrise în cazul general pentru a pune în evidenţă tipurile inerţiale, dar vor trebui examinate de aproape în diferitele cazuri concrete.

4. *Determinarea lui H.* În procesul de determinare a energiei unui singur corp (particula stabilă de la capitolul II) energia datorită rotaţiei este implicată în expresia (1) a masei respective. Aceasta ne îngăduie să considerăm energia totală a sistemului celor două corpuri, ca şi în cazul sistemului de puncte materiale, exprimată prin suma energiilor $c^2m_1$ şi $c^2m_2$ cu energia de interacţiune $2c^2\mu$, $\mu$ fiind masa de interacţiune gravitaţională impusă de formulele (14). Ar trebui să adăugăm şi energia $2c^2\nu$ de interacţiune dilataţională, dar ea este neglijabilă pentru distanţele planetare.

Vom avea deci

$$H = c^2(m_1 + m_2 - 2\mu - 2\mu^*), \tag{16}$$

unde semnul — este acela prezentat şi în cazul maselor punctuale.

Dacă ţinem seama de expresia (1) vom avea

$$\begin{aligned} \delta(c^2m_1) &= \mathbf{v}_1\delta(m_1\mathbf{v}_1) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1\cdot\delta\boldsymbol{\theta}_1, \\ \delta(c^2m_2) &= \mathbf{v}_2\delta(m_2\mathbf{v}_2) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2\cdot\delta\boldsymbol{\theta}_2, \\ \delta(c^2\mu) &= c^2\mu_r\frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) + c^2\delta'\mu, \end{aligned} \tag{17}$$

unde $\delta'\mu$ este variaţia lui $\mu$ în legătură cu celelalte variabile de cît $\mathbf{r}$. Avînd în vedere (11), după ce am neglijat termenii cu $\nu$, rezultă

$$\delta(c^2m_1) = \mathbf{v}_1\cdot\delta(\mathbf{p}_1 - \mu\mathbf{v}_2) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1\cdot\delta\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{v}_1\cdot\delta\mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\,\delta\mu - \mu\mathbf{v}_1\delta\mathbf{v}_2 +$$

$$+ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1\delta\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{v}_1\delta\mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\mu_r\frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\delta'\mu - \mu\mathbf{v}_1.\delta\mathbf{v}_2 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1\delta\boldsymbol{\theta}_1,$$

la fel

$$\delta(c^2m_2) = \mathbf{v}_2.\delta\mathbf{p}_2 - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\mu_r\frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2.\delta'\mu - \mu\mathbf{v}_2.\delta\mathbf{v}_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2\delta\boldsymbol{\theta}_2.$$

Aceste expresii dau

$$\delta H = \mathbf{v}_1.\delta\mathbf{p}_1 + \mathbf{v}_2\delta\mathbf{p}_2 - 2\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\mu_r\frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) - 2\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2\delta'\mu -$$

$$- \mu\delta(\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2) + c^2\mu_r\frac{\mathbf{r}}{r}(\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_1) + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_1.\delta\boldsymbol{\theta}_1 + \dot{\boldsymbol{\alpha}}_2\delta\boldsymbol{\theta}_2 + 2c^2\delta'\mu.$$

## § 2. Ecuaţiile mişcării

Ecuaţiile mişcării rezultă, aşa cum am mai făcut înainte de a fi specificat pe $H$, din anularea derivatei Cartan a formei $\omega_8^{(i)}$.

Ea ne dă mai întîi ecuaţiile

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{L}, \qquad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{L}, \tag{18}$$

unde

$$\mathbf{L} = 2c^2(1 - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2/c^2)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

şi

$$\mu = \frac{\varphi(r)}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2/c^2}}, \tag{19}$$

unde va trebui să luăm şi aici, ca şi în cazul a două puncte materiale,

$$\varphi(r) = \frac{1}{2} f' \frac{m_1^0 m_2^0}{c^2 r}\left(1 + \frac{k}{c^2 r}\right). \tag{20}$$

Ca primă aproximaţie, foarte vecină de cazul clasic al planetelor, putem lua $f'$ egal cu constanta $f$ a lui Newton. Dar poate este mai bine să rezervăm decizia definitivă asupra acestei constante după un examen mai complet al mărimilor ataşate celor două corpuri.

Să observăm de asemenea că termenii care provin din anularea coeficienţilor variaţiilor $\delta\alpha_1$ şi $\delta\alpha_2$ sînt

$$\theta_1 = \theta_1^0, \quad \theta_2 = \theta_2^0 \tag{21}$$

şi că coeficienţii lui $\delta\theta_1$ şi $\delta\theta_2$ sînt identic nuli, ceea ce confirmă validitatea alegerii expresiilor celor două mase care devin

$$m_i = \sqrt{m_i^{02} + \frac{2}{c^2}\left(\frac{1}{2} m_i^2 v_i^2 + K_i\right)},$$

unde $K_i$ depind de valorile impulsurilor constante $\theta_1$ şi $\theta_2$, de determinat după situaţiile iniţiale. Să mai observăm că $\varphi_i$ sînt nule întrucît $\theta_i$ sînt constante.

Capitolul VI

# COSMOLOGIA INVARIANTIVĂ

## § 1. Introducere

1. *Obiectul* central al mecanicii cosmologice este sistemul $\mathscr{S}$ al galaxiilor şi al celorlalte formaţii materiale cum sînt quasarii sau alte formaţii la aceeaşi scară de mărimi ale Universului în totalitatea sa.

Structura acestui sistem se detaşează singură atît prin mărimea componentelor cît şi prin aceea a distanţelor care le separă, apreciate de Fred Hoyle la o sută de milioane de ani lumină, adică, cam unu la sută din cea mai mare distanţă accesibilă observaţiilor de pînă acum.

La acest nivel se poate vorbi, constată cosmologii, de o repartiţie omogenă şi izotropă a acestor corpuri, care se pot, de asemenea, considera într-o primă etapă, ca puncte materiale în sensul obişnuit al mecanicii.

Studiul structurii individuale a masei ce constituie o galaxie sau o altă formaţie de acelaşi nivel este deopotrivă obiect al ştiinţelor fizice şi al mecanicii, care iese din cadrul prezentului capitol, ca şi fizica materiei dispersată în acest Univers sub formă de radiaţii de diverse specii mergînd de la electroni pînă la mezoni şi raze cosmice.

Chiar mişcările de ansamblu, cum ar fi rotaţiile galaxiilor, întrucît sînt şi ele supuse interacţiunii tuturor celorlalte corpuri nu sînt examinate aici, cu toate că elemente pentru un atare examen se găsesc la §1 al capitolului V.

2. *Calea naturală* pentru a construi mecanica sistemului $\mathscr{S}$ pare a fi extinderea directă a mecanicii invariantive sprijinită pe ideea fundamentală a identităţii de comportare a materiei la orice nivel este ea considerată, pe pămînt şi în cer, în cerul planetelor mai întîi şi apoi al stelelor, cum au gîndit Galilei şi Newton, şi apoi la nivelul galaxiilor care se impun experienţei noastre. Condiţia principală este conformitatea cu datele empirice. Dar datele empirice cele mai verificate ce posedăm asupra mecanicii sistemului $\mathscr{S}$ sînt cuprinse în *legea lui Hubble*, după care viteza de recesie a oricărei galaxii faţă de a noastră este proporţională cu distanţa:

$$w = Kr.$$

Extinderea acestei legi empirice la orice sistem de două galaxii s-a făcut de către astronomi pe baza principiului cosmologic al omogeneităţii şi izotropiei enunţate mai sus.

Legea empirică a lui Hubble este, evident, doar o lege cinematică, aşa cum sînt în mecanica sistemului nostru planetar legile lui Kepler.

Mecanica invariantivă, ca şi acea a lui Newton, dă legea dinamică a mişcării sistemului; una dintre consecinţele acestei legi este conservarea impulsului total al sistemului, din care rezultă, fără nici o nouă ipoteză, o lege de tipul Hubble, justificînd astfel aplicarea mecanicii invariantive, aşa cum legile lui Kepler au justificat mecanica lui Newton.

## § 2. Mecanica invariantivă a sistemului $\mathscr{S}_n$

1. *Elementele mişcării.* Notăm cu $P_j(\rho_j, m_j, \mathbf{p}_j)$, $j = 1, 2\ldots, n$ cele $n$ puncte (galaxii) ale sistemului $\mathscr{S}_n$; $\rho_j$ şi $\mathbf{p}_j$ sînt respectivii vectori poziţie şi impuls faţă de un reper euclidian, $m_j$ este masa dinamică $m_j = m_j^0/\sqrt{1 - v_j^2/c^2}$ şi $\mathbf{r}_{ij} = \rho_j - \rho_i$ vectorul $P_iP_j$. Mişcarea este reprezentată în spaţiul-timp newtonian.

Potrivit principiilor mecanicii invariantive, funcţia de stare $H$ care este energia sistemului este un invariant euclidian al său. Este deci o funcţie de mărimile invariante care definesc starea sistemului, în afară de o deplasare euclidiană a reperului.

Aceste mărimi sînt

$$\alpha_j = \frac{1}{2}\pi_j^2;\ \alpha_{jk} = \pi_j\pi_k\ (j < k);\ \beta_{jk} = \pi_j\mathbf{r}_{jk}\ (j \neq k),$$

$$\gamma_{jk} = \pi_k\mathbf{r}_{jk},\ (j \neq k);\ \delta_{jk} = \frac{1}{2}r_{jk}^2\ (j \neq k), \tag{1}$$

$$\varepsilon_{jhk} = \mathbf{r}_{jk}\cdot\mathbf{r}_{kh}\ (j \neq h \neq k)\ (j, h, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Vom avea deci

$$E = E\,(\alpha_j,\ \alpha_{jk},\ \beta_{jk},\ \gamma_{jk},\ \delta_{jk},\ \varepsilon_{jhk})_{j,h,k=1,2\ldots,n}. \tag{2}$$

2. *Principiul* ce se aplică exprimă că

$$J^{(i)} = \int_L \omega_\delta^{(i)},\ \text{unde}\ \omega_\delta^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \pi_j\delta\rho_j - E\,\delta t \tag{3}$$

este un invariant al mişcării pe care o reprezentăm prin operatorul d. Această invarianţă se exprimă prin egalitatea

$$DJ^{(i)} = \iint_{L\times l} \mathrm{d}\omega_\delta^{(i)} - \delta\omega_\mathrm{d}^{(i)} = 0. \tag{4}$$

Dar

$$\mathrm{d}\omega_{\delta}^{(i)} - \delta\omega_{\mathrm{d}}^{(i)} = \sum_{s=1}^{n} \mathrm{d}\pi_s \delta\rho_s - \sum_{s=1}^{n} \mathrm{d}\rho_s \delta\pi_s - \mathrm{d}E\delta t + \mathrm{d}t\delta E, \tag{5}$$

$$\delta E = \sum_{s=1}^{n} E_{\alpha_s} \pi_s \delta\pi_s + \sum_{s,k=1}^{n} E_{\alpha_{sk}} (\pi_s \delta\pi_k + \pi_k \delta\pi_s) +$$

$$+ \sum_{s,k=1}^{n} E_{\beta_{sk}} \pi_s \delta\mathbf{r}_{sk} + \sum_{s,k=1}^{n} E_{\beta_{sk}} \mathbf{r}_{sk} \delta\pi_s + \sum_{s,k=1}^{n} E_{\gamma_{sk}} \pi_k \delta\mathbf{r}_{sk} +$$

$$+ \sum_{s,k=1}^{n} E_{\gamma_{sk}} \mathbf{r}_{sk} \delta\pi_k + \sum_{s,k=1}^{n} E_{\delta_{sk}} \mathbf{r}_{sk} \delta\mathbf{r}_{sk} + \sum_{j,h,k=1}^{n} E_{\varepsilon_{jhk}} (\mathbf{r}_{jk} \delta\mathbf{r}_{kh} + \mathbf{r}_{kh} \delta\mathbf{r}_{jk}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \left( E_{\alpha_s} \pi_s + \sum_{h=1}^{n} E_{\alpha_{sh}} \pi_h + \sum_{h=1}^{n} E_{\beta_{sh}} \mathbf{r}_{sh} + \sum_{h=1}^{n} E_{\gamma_{hs}} \mathbf{r}_{hs} \right) \delta\pi_s +$$

$$+ \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} E_{\beta_{jk}} \pi_j (\delta\rho_k - \delta\rho_j) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} E_{\gamma_{jk}} \pi_k (\delta\rho_k - \delta\rho_j) +$$

$$+ \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} E_{\delta_{jk}} \mathbf{r}_{jk} (\delta\rho_k - \delta\rho_j) + \sum_{j,h,k=1}^{n} E_{\varepsilon_{hkj}} \mathbf{r}_{hj} (\delta\rho_k - \delta\rho_j) +$$

$$+ \sum_{j,h,k=1}^{n} E_{\varepsilon_{jhk}} \mathbf{r}_{kh} (\delta\rho_k - \delta\rho_j),$$

$$\delta E = \sum_{s=1}^{n} \Phi_s \delta\pi_s + \sum_{s=1}^{n} \mathbf{L}_s \delta\rho_s , \tag{6}$$

$$\mathbf{L}_s = \Psi_s \pi_s + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} \Psi_{sk} \pi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{u} \chi_{ks} \mathbf{r}_{ks} + \sum_{h,k=1}^{n} \chi_{hks} \mathbf{r}_{hk},$$

$$\Phi_s = E_{\alpha_s} \pi_s + \sum_{h=1}^{n} E_{\alpha_{sh}} \pi_h + \sum_{h=1}^{n} F_{sh} \mathbf{r}_{sh}.$$

A scrie că $DJ^{(i)} = 0$ oricare este $\mathbf{L}_s$, revine a cere ca (5), în care se ţine seamă de (6) să se anuleze, ceea ce dă, după împărţirea cu $\mathrm{d}t$, egalitatea

$$\sum_{s=1}^{n} \left( \frac{\mathrm{d}\pi_s}{\mathrm{d}t} + \Psi_s \pi_s + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} \Psi_{ks} \pi_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} \chi_{ks} \mathbf{r}_{ks} + \sum_{\substack{h,k=1 \\ h \neq k}}^{n} \chi_{hks} \mathbf{r}_{hk} \right) \delta\rho_s -$$

$$- \sum_{s=1}^{n} \left( \frac{\mathrm{d}\rho_s}{\mathrm{d}t} - \Phi_s \right) \delta\pi_s - \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \delta t = 0.$$

Rezultă de aici sistemul de ecuaţii

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \Phi_s, \tag{7}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\frac{d\pi_s}{dt} + \mathbf{L}_s = 0 \tag{8}$$

şi

$$E = E_0. \tag{9}$$

Primul sistem (7) defineşte impulsurile $\pi_j$ în funcţie de viteze şi poziţii.

Al doilea grup dă ecuaţiile mişcării. Ultima ecuaţie, (9), corespunde conservării energiei.

După însăşi formaţia termenilor ecuaţiilor (8) rezultă imediat că

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{d\pi_s}{dt} = 0.$$

Deci

$$\sum_{s=1}^{n} \pi_j = \mathbf{C}, \tag{10}$$

ecuaţie care reprezintă conservarea impulsului.

Punem pentru a simplifica scrisul

$$\mathbf{v}_s = \frac{d\rho_s}{dt}.$$

Ecuaţiile (7) care se mai pot scrie

$$\mathbf{v}_s - \sum_{h=1}^{n} F_{sh}\mathbf{r}_{sh} = E_{\alpha_s}\pi_s + \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq s}}^{n} E_{\alpha_{sh}}\pi_h \tag{11}$$

au coeficienţii în $\pi_s$ simetrici. Presupunînd că avem

$$\text{Det } (E_{\alpha_{sh}}) \neq 0, \tag{12}$$

ecuaţiile (11) au o soluţie de forma

$$\pi_j = m_j\left(\mathbf{v}_j - \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq j}}^{n} E_{jh}\mathbf{r}_{jh}\right) + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \mu_{jl}\left(\mathbf{v}_l - \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq l}}^{n} F_{lh}\mathbf{r}_{lh}\right),$$

unde $\mu_{jl} = \mu_{lj}$, sau încă

$$\pi_j = m_j\mathbf{v}_j + \sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{n} \mu_{jl}\mathbf{v}_l - m_j \sum_{\substack{h=1 \\ h\neq j}}^{n} F_{jh}\mathbf{r}_{jh} - \sum_{\substack{l,h=1 \\ h\neq l \\ l\neq j}}^{n} \mu_{jl}\mathbf{r}_{lh}F_{lh}. \tag{13}$$

Dacă comparăm cu expresiile obținute pentru impulsuri în cazul $n = 2$, trebuie să considerăm coeficienții notați cu $m_j$ ca reprezentînd masele respective,

$$m_j = m_j^0/\sqrt{1 - v_j^2/c^2}, \tag{14}$$

iar $\mu_{jl}$ masa de interacțiune gravitațională între $P_j$ și $P_l$,

$$\mu_{jl} = -\frac{1}{2} f m_j^0 m_l^0 (1 + k/c^2 r_{jl})/c^2 r_{jl} \sqrt{1 - \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_l/c^2}. \tag{15}$$

Coeficienții simetrici $F_{jl}$ vor fi caracteristici ai interacțiunii dilataționale.

3. *Expresia energiei.* Constatăm din rezultatele de mai sus că mișcarea inerțială a $n$ corpuri nu face să intervină alte interacțiuni decît acele ce am găsit în cazul $n = 2$, adică interacțiunea gravitațională și aceea dilatațională. Putem de aceea scrie ca și în cazul $n=2$

$$E = c^2 \left( \sum_{j=1}^{n} m_j + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \mu_{jk} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{n} \nu_{jk} \right).$$

Pentru a găsi expresiile maselor de interacțiune $\nu_{jk}$ procedăm ca în cazul $n = 2$ și găsim

$$\nu_{jk} = -\frac{1}{2} g l_{jk} \mathbf{r}_{jk}^2/c^4 \sqrt{1 - u_{jk}},$$

cu

$$u_{jk} = [m_j^0 v_j^2 \cos^2 (\mathbf{v}_j, \mathbf{r}_{jk}) + m_k^0 v_k^2 \cos^2 (\mathbf{v}_k, \mathbf{r}_{jk})]/2(m_j^0 + m_k^0)\, c^2.$$

4. *Expresiile impulsurilor* sînt deci următoarele:

$$\boldsymbol{\pi}_j = m_j \mathbf{v}_j + \sum_{k \neq j} \mu_{jk} \mathbf{v}_k + \sum_{k \neq j} h_{jk} \nu_{jk} \mathbf{r}_{jk}, \tag{16}$$

cu

$$h_{jk} = \frac{m_j^0 \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{r}_{jk}}{(m_j^0 + m_k^0)\, r_{jk}}.$$

Dacă ținem seamă de ele, teorema conservării impulsului ne dă egalitatea

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \mu_{12} \mathbf{v}_1 + \mu_{21} \mathbf{v}_2 + h_{12} \nu_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} + h_{21} \nu_{21} \mathbf{r}_{21} =$$
$$= \mathbf{C} - \sum_{j>2} m_j \mathbf{v}_j + \sum_{i+j>3} \mu_{ij} \mathbf{v}_j - \sum_{i+j>3} h_{ij} \nu_{ij} \mathbf{r}_{ij} = \Gamma, \tag{17}$$

unde în membrul al doilea nu mai figurează vectorii $\mathbf{r}_{12}$ și $\mathbf{r}_{21}$. Punem $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$, $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$, $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}$ și expresia (17) devine după multiplicarea cu vectorul $\mathbf{r}/r$

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + \mu(\xi_1 + \xi_2) + (h_{21} + h_{12}) \nu \frac{\mathbf{r}^2}{r^2} = \Gamma \cos (\Gamma, \mathbf{r}), \tag{18}$$

unde

$$\xi_1 = v_1 \cos(\mathbf{v}_1, \mathbf{r}), \quad \xi_2 = v_2 \cos(\mathbf{v}_2, \mathbf{r}).$$

Dacă folosim expresiile lui $h_{21}$ şi $h_{12}$, ale lui $\mu$, în care neglijăm termenii corectivi ai gravităţii $k/c^2r$, şi $\nu$ şi dacă dividem cu $\Gamma \cos(\Gamma, \mathbf{r})$ obţinem egalitatea

$$\frac{1}{c^2 r} M + \frac{r^2}{c^4} N = 1, \tag{19}$$

unde $M$ şi $N$ sînt expresii care nu mai conţin explicit vectorul $\mathbf{r}$ sau valoarea sa $r$. Ele conţin totalitatea celorlalţi vectori distanţă, vitezele celorlalte corpuri şi unghiurile. Dacă derivăm în ambii membri din (19) în raport cu timpul şi dividem apoi prin $2r/c^2$ obţinem egalitatea

$$\left(N - \frac{c^2}{2r^3} M\right) \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}}{r} = -\frac{1}{2}\left(\dot{N} + \frac{c^2}{r^3} \dot{M}\right) r. \tag{20}$$

Dar

$$\frac{|\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}|}{r} = \frac{|\mathbf{r}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)|}{r} = |\xi_2 - \xi_1| = w$$

este viteza de recesie a corpurilor $P_1$ şi $P_2$, care sînt dealtfel două corpuri oarecare ale sistemului $\mathscr{S}_n$. Formula (20) ne dă atunci legea teoretică de dilatare pentru cu-o-lul $P_1$, $P_2$ în interiorul sistemului $\mathscr{S}_n$,

$$w = \frac{1}{2} \frac{\left|\dot{N} + \frac{c^2}{r^3} \dot{M}\right|}{\left|N - \frac{c^2}{2r^3} M\right|} r. \tag{21}$$

5. *Existenţa limitei c* pentru vitezele corpurilor materiale este implicată în construcţia mecanicii invariantive de la primul ei pas.

O condiţie de valabilitate a legii (21) este deci dată, cu necesitate de inegalitatea

$$\frac{1}{2} \frac{\left|\dot{N} + \frac{c^2}{r^3} \dot{M}\right|}{\left|N - \frac{c^2}{2r^3} M\right|} r < c, \tag{22}$$

pentru orice pereche de galaxii, deci orice $r$ în interiorul sistemului,

6. *Un prim examen* în lumina consideraţiilor de mai sus şi în special a legii empirice a lui Hubble ne arată că nu putem avea nici $\dot{N} = 0$, ceea ce ar da

$$w = \left| \dot{N} + \frac{c^2}{r^3} \dot{M} \right| \frac{r^4}{|Mc^2|},$$

nici $\dot{N} = 0$, ceea ce ar da

$$w = \frac{1}{2} \frac{|c^2 \dot{M}|}{\left| N - \frac{c^2}{2r^3} M \right|} \frac{1}{r^2},$$

în contradicţie cu legea dilataţiei.

Putem dar pune legea (21) sub forma

$$w = \frac{1}{2} \frac{\left| \frac{\dot{N}}{N} + \frac{c^2}{r^3} \frac{\dot{M}}{N} \right|}{\left| 1 - \frac{c^2}{2r^3} \frac{M}{N} \right|} r \tag{23}$$

mai simplă pentru consideraţiile ce urmează.

7. *Cele două cazuri: universul finit sau infinit.* Oricare este situaţia, fie că universul cuprinde un număr finit de galaxii, fie un număr infinit, noi trebuie să extindem relaţia (23) la întreg universul; numai aşa ea poate căpăta un sens *fizic* şi nu doar unul *formal*. Corpurile care îl compun exercită o interacţiune cu atît mai puternică cu cît $r$ este mai mare, deci formula (23) este exactă numai dacă poate implica prezenţa tuturor.

Dacă Universul este *finit*, luăm pe $n$ egal cu numărul total al galaxiilor. În acest caz $M$ şi $N$ au nişte valori care reprezintă întreg sistemul din care am extras doar cele două corpuri $P_1$ şi $P_2$. N-avem decît să presupunem o oarecare stabilitate în mare a sistemului, şi cu aceasta că $\frac{\dot{N}}{N}$, $\frac{\dot{M}}{N}$, $\frac{M}{N}$ sînt limitate superior şi inferior în timpul unei anume perioade pentru a conclude că, de îndată ce $r$ depăşeşte o anume valoare, legea (23) se reduce practic la următoarea

$$w = \frac{1}{2} \left| \frac{\dot{N}}{N} \right| r, \tag{24}$$

unde $\frac{\dot{N}}{N}$ nu depinde explicit de $r$.

Exigenţa reprezentată de formula (22) devine în acest caz

$$r < 2c \Big/ \left| \frac{\dot{N}}{N} \right|, \tag{25}$$

inegalitate care ar arăta limita superioară a distanţelor dintre galaxiile universului întrucît $N$, deci şi $\dot{N}$ privesc sistemul tuturor galaxiilor, au deci o valoare, pe care practic o reprezintă chiar constanta lui Hubble.

Consideraţiile de mai sus trebuie să primească două corecţii principale incluse în următoarele observaţii;

*Observaţia* 1. $\frac{\dot{N}}{N}$ este calculat pentru întreg sistemul galaxiilor din care se extrag cele două pe care le desparte **r**; el depinde deci, dacă nu explicit, dar implicit de $r$. Fiind dat însă numărul foarte mare al tuturor galaxiilor, dependenţa aceasta este slabă şi nu poate fi sensibilă decît pentru $r$ foarte mare. Aceasta arată că relaţia $w < c$ poate fi respectată dar şi faptul că legea empirică a lui Hubble trebuie să primească o corelaţie compatibilă atît cu experienţa cît şi cu teoria.

*Observaţia* 2. Coeficientul $\frac{\dot{N}}{N}$ este deci slab variabil cu $r$, pentru motivul arătat. El este însă variabil şi cu timpul prin însăşi structura sa. Întrucît $M$ şi $N$ care figurează în (21) şi (23) sînt mărimi caracteristice ale Universului — indirect şi slab dependente de $r$ — derivatele lor $\dot{M}$ şi $\dot{N}$ reprezintă două viteze reprezentative ale dinamicii acestui univers. Experienţa care confirmă în special legea lui Hubble ne sugerează ipoteza că variaţia în timp a acestor derivate şi mai cu seamă a rapoartelor $\frac{\dot{M}}{M}$, $\frac{\dot{N}}{N}$ ca şi a raportului $\frac{M}{N}$ este mică. Timpul de-a lungul căruia s-au efectuat experienţele noastre cosmice şi în particular măsurile relative la efectul Hubble este însă prea scurt pentru a justifica singur afirmaţia de stabilitate ce am făcut mai sus, cu atît mai mult cu cît chiar sub ochii telescoapelor noastre s-au petrecut numeroase catastrofe cosmice de dimensiunile uriaşe care interesează teoriile expuse mai sus, sau au apărut corpuri în evoluţie rapidă şi încă neexplicată care pot tulbura orice teorie. Răspunsul nu pare greu de dat. Mai întîi timpul observaţiilor nu este doar acela al duratei observaţiilor noastre aici pe pămînt, ci este acela al suprapunerii duratelor comunicaţiilor pe care le înregistrăm şi care se întind pînă la 10 miliarde de ani lumină. Catastrofele care au intervenit de cînd cele mai depărtate galaxii ne-au trimis informaţiile despre ele, prin unde de lumină sau unde radio, sînt locale şi puţin semnificative faţă de numărul de informaţii ce înregistrăm de la toate corpurile universului. Cu aceasta

trebuie să considerăm, alături cu toţi cosmologii, că timpul experienţelor noastre este şi el la nivelul obiectului ce observăm.

3. *Dilataţie sau oscilaţie?* Am dedus legea (21) din formula (20) restrîngîndu-i aplicaţia numai la egalitatea valorilor absolute ale celor doi membri. Dacă nu facem această restricţie sugerată de legea empirică a dilataţiei şi considerăm viteza de recesie propriu zisă cu semnul ei, formula (20) ne dă

$$w = \frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}\frac{1+\frac{c^2}{r^3}\frac{\dot{M}}{\dot{N}}}{1-\frac{c^2}{2r^3}\frac{M}{N}}r$$

sau, în condiţiile pe care le-am discutat mai sus

$$w \sim \frac{1}{2}\frac{\dot{N}}{N}r$$

ceea ce arată că $w$ poate fi pozitiv sau negativ după semnul raportului $\frac{\dot{N}}{N}$. Dat fiind că variaţia lui $\frac{\dot{N}}{N}$ este cosmic lentă, lentă ar fi şi schimbarea semnului acestui raport, dacă această schimbare poate avea loc, în care caz am putea avea de-alungul timpului cosmic o succesiune de mişcări generale de dilataţii şi contracţii ale sistemului galaxiilor, care constituie insulele de concentrare de masă în oceanul de radiaţii despre care teoria precedentă nu spune nimic.

## § 3. Ipoteza numărului infinit al galaxiilor

1. *Problema dilataţiei.* Nu este uşor de acceptat ideea că Universul galaxiilor este finit, deşi mecanica invariantivă o sprijină aşa cum vom vedea.

În ce priveşte valabilitatea eventuală a formulelor (21) şi (23) sau (24) în ipoteza universului infinit sînt de făcut consideraţiile următoare.

Observăm mai întîi că în legea empirică a lui Hubble sînt implicate efectele dilataţionale ale tuturor corpurilor universului finit sau infinit. De aceea dacă în formula (23) în care $M$ şi $N$ depind de numărul $n$ al galaxiilor facem pe $n$ să tindă la infinit aşa ca să le cuprindă pînă

la urmă pe toate, expresia din membrul al doilea trebuie să conveargă către o limită care va avea forma

$$|w| = \frac{1}{2} \frac{\left| H + \frac{c^2}{r^3} K \right|}{\left| 1 - \frac{c^2}{2r^3} L \right|} r, \tag{26}$$

unde $H$, $K$, $L$ sînt limitate cel puţin în epoca prezentă a vieţii Universului, în înţelesul pe care l-am lămurit mai sus.

Pentru $r$ suficient de mare legea capătă forma aproximativă

$$w = \frac{1}{2} |H| r, \tag{27}$$

$H$ nefiind riguros constant atît în ce priveşte timpul cît şi dependenţa de $r$ şi obligat să verifice condiţia

$$|H| < 2cr^{-1}. \tag{28}$$

2. *Expresia energiei.* Energia unei galaxii, de pildă a galaxiei $P_1$, din sistemul $\mathscr{S}_n$ are expresia următoare

$$E_1 = m_1 c^2 - f \sum_{j=2}^{n} \frac{m_1^0 m_j^0}{r_{12} \sqrt{1 - \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j / c^2}} \left( 1 + \frac{k}{c^2 r_{1j}} \right) - \frac{g}{c^2} \sum_{j \geqslant 2} l_{1j} r_{1j}^2 / \sqrt{1 - u_{1j}} \tag{29}$$

unde $f$ şi $g$ sînt constante universale, $f$ constanta lui Newton iar $g$ o constantă încă de determinat odată cu coeficienţii $l_{1j}$.

Această expresie este doar convenţională cîtă vreme nu considerăm sistemul $\mathscr{S}_n$ ca fiind constituit din toate galaxiile universului, pentru că interacţiunea fiecăreia dintre ele cu $P_1$ îi aduce o contribuţie energetică.

Dacă $n$ este finit, expresia lui $E_1$ păstrează o valoare finită, dacă însă $n$ ar fi infinit valoarea energiei dinamice a galaxiei (care este o galaxie oarecare) ar fi infinită, ceea ce nu putem admite. Sîntem puşi deci în alternativa de a renunţa la ipoteza numărului infinit de galaxii sau de a modifica teoria care a dat o concordanţă aşa de completă cu observaţiile.

Considerăm dar finit numărul galaxiilor şi împreună cu ele al tuturor formaţiilor care le sînt comparabile.

## § 4. Interpretarea newtoniană. Cele două feluri de forțe inerțiale

Expresia energiei dată de (29) confirmă interpretarea simplă a structurii dinamice a Universului, în limbajul newtonian, aproximativ dar sugestiv, pe care l-am adoptat în cazul clasic.

Dacă facem, în același timp, abstracție de factorii $1/\sqrt{1-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_j/c^2}$ și $1/\sqrt{1-u_{1j}}$ observăm că termenii aditivi din expresia (29) sînt de două feluri: potențialii gravitaționali $f\frac{m_1^0 m_j^0}{r_{1j}}$ cu corecțiile respective și potențialii elastici $\frac{gl_{1j}}{c^2}r_{1j}^2$. Cei dintîi corespund forțelor de atracție gravitațională, cei din urmă unei interacțiuni elastice, proporțională cu distanța. Aceștia doi sînt dealtfel precum se știe singurii potențiali compatibili cu materia.

## § 5. Considerații finale asupra ipotezelor folosite în extinderea cosmologiei

De la început, odată cu problema celor două corpuri, mecanica invariantivă a fost pusă în obligația de a fi o știință a universului, întrucît a implicat, ca o consecință a principiilor, termenii care corespund potențialului elastic a căror mărime este de ordin cosmologic.

Extinderea propriu-zis cosmologică n-a constat deci în adăugarea unor principii sau ipoteze mecanice noi, ci numai în actul de selecție al corpurilor la a căror mișcare se referă. Am considerat, anume galaxiile sau formațiile similare, lăsînd la o parte tot restul de materie disociată în radiații sau în alte forme mai puțin cunoscute și împrăștiate în univers.

Că sistemul galaxiilor așa izolat constituie un sistem mecanic supus principiilor mecanicii invariantive rezultă clar din dezvoltările precedente, în care omogeneitatea și izotropia, deci ceea ce se numește principiul cosmologic, impus de observații și de legea empirică a lui Hubble servește *a posteriori*, la interpretarea rezultatelor teoretice obținute.

Capitolul VII

# COSMOLOGIA RELATIVISTĂ

## § 1. Cosmología lui Albert Einstein

Un alt mod cantitativ de a sprijini studiul problemelor cosmologice a fost acela geometric relativist iniţiat de De Sitter şi Einstein.

Pentru a prezenta în modul cel mai clar acest punct de vedere care simplifică excesiv imaginea Universului, adoptăm punctul de vedere la care, după mai multe ezitări, a rămas A. Einstein, aşa cum este exprimat în capitolul „Asupra structurii cosmologice a spaţiului" din septembrie 1932, apărut în volumul publicat la Hermann în 1933.

„Pentru motive de simplitate vom face abstracţie", spune A. Einstein, „de faptul că materia este concentrată în stele şi în sisteme de stele, separate în aparenţă unele de altele prin spaţii goale, şi să o considerăm ca şi cum ar fi distribuită într-un mod continuu pe mari spaţii cosmice"

Se mai presupune „că densitatea energiei materiei ponderabile depăşeşte aşa de mult pe aceea a radiaţiei încît aceasta din urmă poate fi neglijată. Această presupunere nu este desigur cu totul exactă, dar aproximaţia astfel introdusă nu schimbă nimic esenţial în consideraţiile şi rezultatele ce vor urma".

Universul geometric reprezentativ al distribuţiei continue de materie cu densitate spaţială uniformă la fiece moment nu poate fi euclidian, spune Einstein, deoarece euclidian înseamnă curbură nulă, iar curbură nulă, după convenţiile relativităţii, înseamnă masă gravitaţională nulă.

Iată acum raţionamentul care fundează ceea ce Einstein consideră ca metrica universului.

„Cea mai simplă structură a spaţiului, după aceea euclidiană pare să fie cea statică" (adică coeficienţii să fie independenţi de timp) şi avînd curbură uniformă în secţiunile sale spaţiale ($t = \text{const}$), iar „un spaţiu tridimensional cu curbură pozitivă constantă (în particular un spaţiu sferic) este precum se ştie caracterizat de elementul liniar $\mathrm{d}\sigma^2$ a cărui formă este

$$\mathrm{d}\sigma^2 = \frac{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2}{(1 + D^{-2}r^2)^2} \quad \text{cu} \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

$D$ fiind diametrul sferei presupus constant.

„Un univers static, sferic din punct de vedere spaţial este, *prin urmare*, descris de elementul liniar

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{(1 + D^{-2}r^2)^2} - c^2 dt^2. \qquad (1)$$

„Prin urmare" este nejustificat, dat fiind că, pentru motive pe care le vom pomeni, A. Einstein înlocuieşte elementul (1) prin următorul

$$ds^2 = \left(\frac{D}{D_0}\right)^2 \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{(1 + D^{-2}r^2)^2} - c^2 dt^2, \qquad (2)$$

unde diametrul galactic $D = D(t)$ este o funcţie de $t$, cu $D_0 = D(0)$, $\frac{D}{D_0} = A$ este „factorul de expansiune".

Obligaţia de a renunţa la formula (1) a venit de la incompatibilitatea acestui element liniar cu ecuaţiile relativităţii generale şi cu ipoteza densităţii constante".

În a treia etapă A. Einstein constată că „în starea actuală a cunoştinţelor, faptul unei densităţi a materiei diferită de zero nu trebuie să fie legat teoretic cu o curbură spaţială ci cu o extensiune spaţială. „Această constatare este legată de faptul că putem renunţa la curbura spaţială şi lua pentru forma liniară expresia

$$ds^2 = A^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - c^2 dt^2,$$

unde factorul de expansiune $A$ este numai funcţie de timp.

Dacă aplicăm acum acestei forme liniare ecuaţiile relativităţii generale, obţinem o ecuaţie care arată că

$$\frac{\dot{A}}{A} = \frac{\dot{D}}{D}$$

este o constantă, pe care dacă o egalăm cu constanta lui Hubble rezultă exact legea dilatării universului :

$$\dot{D} = hD,$$

viteza de dilatare este proporţională cu mărimea.

Este drept că legea se referă aici numai *la Universul în întregimea lui* şi nu la depărtarea între două galaxii oarecare, cum afirmă în forma sa generală legea lui Hubble.

Pentru a regăsi legea generală, trebuie să revenim la forma (2) a elementului liniar, aşa cum au făcut alţi autori, şi să găsim pe aceea care se potriveşte cu rezultatul ce voim a obţine, aşa cum, de fapt, am procedat, urmînd drumul de mai sus.

Întreaga experienţă geometrică a arătat că expresia $ds^2$-ului dă, în general, o informaţie locală şi că prea puţine sînt varietăţile riemaniene pentru care un $ds$ local poate da o informaţie pentru întreaga varietate, cum pretindem noi pentru forma liniară care să reprezinte universul, cu tot trecutul său, chiar şi cu data naşterii sale, adică cu un moment cînd el se găseşte într-o situaţie singulară.

## §2. Necontradicţia dintre cosmologia stării staţionare şi aceea mecanică

Fără să ne îngăduim aici o judecată asupra teoriilor cosmologice cuprinse în genere sub denumirea „stării staţionare", cu modificările care i se aduc necontenit sub imperiul observaţiilor şi al progreselor în fizica şi chimia materiei şi naturii, nu pare să existe vreun fel de incompatibilitate cu rezultatele pe care le-a adus mecanica invariantivă, care se ocupă numai de mişcările globale ale aglomeraţiilor materiale care constituie galaxiile şi lasă deocamdată la o parte atît structura fizică şi chiar mecanică a acestor sisteme considerate în mic, cît şi relaţiile lor cu oceanul radiaţiilor în sînul cărora ele se formează şi se mişcă.

Capitolul VIII

# COMENTARII

## § 1. Spații și axiome ale mișcării

1. *Introducere.* În aceste comentarii ne propunem să examinăm noțiunile introduse în mecanica invariantivă, în special spațiile și principiile folosite, și să le examinăm dintr-un punct de vedere mai precis axiomatic.

Numai în posesia elementelor formalizate avem posibilitatea de a formula cu precizie principiile mecanicii invariantive ale mișcării unei mase materiale fie în formă devenită clasică, deși conține masa variabilă, fie într-un cîmp mai general, cu caracter tensorial.

Aceasta este, în general, rolul axiomelor: ele servesc, în primul rînd, la precizarea elementelor unei teorii deja verificate, pentru a obține puncte de sprijin cît mai solide pentru generalizările naturale.

Am folosit, în paginile precedente, diferite spații fără a preciza proprietățile respective.

Trebuie acum să reexaminăm rolul fiecăruia dintre aceste spații și să precizăm relațiile dintre ele.

Vom vedea, cu acest prilej, că utilitatea spațiului lui Einstein-Minkowski nu precede teoria mișcării inerțiale a punctului material, ci o urmează, acest spațiu fiind necesar numai cînd se trece la mișcarea într-un cîmp, întrucît structura de spațiu Einstein-Minkowski servește la obținerea unei structuri geometrice adecvate a cîmpului. Sau, mai curînd, servește la obținerea unei interpretări geometrice pentru structura analitică la care au condus și teoriile fizice.

2. *Spațiile necesare.* Iată, în primul rînd, enumerarea acestor spații.

a) Spațiul $S$ care este spațiul euclidian tridimensional al lui Newton. Este spațiul de localizare a corpurilor, folosit de științele naturii și de tehnică.

Grupul de transformări euclidiene al acestui spațiu este format din mișcările de translație și rotație care conservă distanțele și unghiurile. Unui punct unic din acest spațiu nu îi corespunde nici un invariant scalar euclidian. Unui sistem de două puncte îi corespunde invariantul unic care este distanța $r$.

b) Spațiul $T$ de puncte, euclidian, unidimensional identic cu linia timpului din mecanica și din astronomia clasică.

Grupul de transformări euclidiene al spațiului $T$ este format din translații.

c) Spațiul $S'(\equiv E_3)$ vectorial tridimensional izomorf cu spațiul cuplurilor $(P_0, P)$, unde $P_0$ este un punct fix, iar $P$ un punct generic al lui $S$.

Invarianţii euclidieni asociaţi unui vector $\mathbf{u}$ din $S'$ sînt $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = u^2$ şi orice funcţie scalară de $u^2$, pe care, din motive de convenienţă în calcule, o scriem $f\left(\frac{1}{2}u^2\right)$.

Invarianţii scalari euclidieni ai sistemului de doi vectori $\mathbf{u}$ şi $\mathbf{v}$ din $S'$ sînt $u^2$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $v^2$ şi orice funcţie scalară de invarianţii precedenţi $f\left(\frac{1}{2}u^2, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \frac{1}{2}v^2\right)$.

d) Spaţiul $T'(\equiv E_1)$ izomorf cu spaţiul diferenţelor $t - t_0$, unde $t_0$ este o valoare fixă.

e) Spaţiul punctual $R$ cu patru dimensiuni, definit ca produsul cartezian dintre $S$ şi $T$

$$R = S \times T.$$

f) Spaţiul vectorial $R' = S' \times T'$.

g) Spaţiul fază-timp $U$, cu şapte dimensiuni definit prin produsul cartezian

$$U = S \times E_3 \times T,$$

unde $E_3$ este spaţiul euclidian tridimensional.

h) Spaţiul $U' = S' \times E_3 \times T'$.

3. *Invarianţii spaţiilor $R$ şi $U$.* Singurele transformări care lasă invariantă structura fiecăruia dintre aceste două spaţii sînt acelea care se referă separat la $S(S')$, la $E_3$ şi la $T(T')$. Primele două sînt identice cu transformările euclidiene definite pe $S$ cu condiţia să identificăm pe $E_3$ cu spaţiul cuplurilor de puncte $P_0$, $P$ din $S$. Transformările euclidiene definite pe $S$ nu au efect asupra lui $E_3$ sau $T$.

Transformările care urmează să fie considerate pe $R$ sînt deci formate din mulţimea transformărilor euclidiene pe $S$ la care trebuie să asociem transformările pe $T$. Acestea din urmă nu au alţi invarianţi scalari decît constantele absolute.

Rezultă de aici că transformările pe care trebuie să le avem în vedere pe $R$ şi pe $U$ au ca singuri invarianţi scalari, independenţi de $t$, pe aceia ai spaţiului $S$.

4. *Operatorul diferenţial $\delta$ şi formele diferenţiale corespunzătoare.* Operatorul diferenţial $\delta$ este definit după cum urmează:

1°. Fie $\mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un punct din spaţiul numeric $R_n$ şi fie $\delta\mathbf{P}(\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n)$ vectorul generic al spaţiului vectorial $R_n$, identic cu $R_n$ ca spaţiu vectorial. Pentru fiecare specificare a lui $\delta$ şi pentru fiecare $P$ corespunde un vector $\delta\boldsymbol{\rho}$ din $R_n$ şi numai unul şi reciproc, fiecărui vector din $R_n$ îi corespunde un $\delta\mathbf{P}$ şi numai unul.

2°. Efectul lui $\delta$ asupra unui scalar $F(P)$ din $R_n$ este dat de produsul scalar dintre vectorul grad $F$ din $R$ şi vectorul $\delta\mathbf{P}$, care cores-

punde, în identificarea precedentă, unui vector generic din $R_n$:

$$\delta F(P) = \text{grad } F \cdot \delta \mathbf{P},$$

dacă bineînțeles grad $F$ există.

În general, considerăm, postulîndu-le, că regulile de aplicare a lui $\delta$ la sume sau la produse, la vectori sau produse vectoriale asociate punctelor din $R_n$ sînt acelea ale diferențierii obișnuite, ținînd seama de caracteristicile lui $\delta\mathbf{P}$ indicate la punctul 1°.

3°. O specificare, ca de exemplu d, a lui $\delta$, va fi, în cele ce urmează, definită printr-o egalitate vectorială

$$d\mathbf{P} = \mathbf{V} \cdot ds,$$

unde $\mathbf{V}$ este un vector bine definit, asociat punctului $P$ din $R_n$ și $ds$ este o valoare numerică convenabil aleasă.

Această definiție arată că vectorul $\mathbf{V}$ este egal, aproape peste tot, de-a lungul unei curbe $P = P(s)$, cu derivata vectorială calculată în punctul $P$.

Parametrul $s$ poate fi identificat, dacă împrejurările o cer, cu $t$.

Trebuie să mai considerăm încă și expresii de forma

$$A_\delta = \sum_{j=1}^{n} A_j(P)\delta x_j,$$

care sînt sau nu produse scalare după cum caracterul sistemului $A_j(P)$ este sau nu vectorial.

5. *Spații vectoriale și cîmpuri de vectori generate.* Operatorul diferențial general $\delta$ face să corespundă fiecărui punct $M(\boldsymbol{\rho}, t)$ din spațiul $R$, spațiul cu patru dimensiuni al vectorilor $(\delta\mathbf{M}, \delta t)$ cu componentele $(\delta\mathbf{r}, \delta t)$ pe care îl notăm cu $R_{\mathbf{r},t}$ și care poate fi identificat cu spațiul $R'$.

Același operator $\delta$ face să corespundă fiecărui punct $N(\mathbf{r}, \mathbf{u}, t)$ din spațiul $U$, spațiul cu șapte dimensiuni identificabil cu $U'$, pe care îl notăm și cu $U_{\mathbf{r},\mathbf{u},t}$.

Operatorul $\delta$ mai generează și două spații fibrate $\tilde{R}$ și $\tilde{U}$ definite după cum urmează

$$\tilde{R} = \{R_{\mathbf{r},t} | (\mathbf{r}, t) \in R\},$$

$$\tilde{U} = \{U_{\mathbf{r},\mathbf{u},t} | (\mathbf{r}, \mathbf{u}, t) \in U\}.$$

6. *Formele diferențiale definite de operatorul generic* $\delta$. Fie $\mathbf{u}$ un vector din $S'$ și $\mathbf{u}_0$ un vector din $T'$. În urma unor identificări evidente, considerăm în $R_{\mathbf{r},t}$ sistemele $\mathbf{u}$, $u_0$ de componente $\delta\mathbf{r}$, $\delta t$. Primul este un vector fix, al doilea un vector generic. Expresia

$$\omega_\delta = \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{r} + u_0 \delta t$$

este o sumă de produse scalare $\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r}$ şi $u_0\delta t$ din spaţiile vectoriale respective $S'$ şi $T'$, deci este un invariant la cea mai generală transformare euclidiană a lui $U_{r,t}$ în care $\omega_\delta$ este definită. În adevăr, această transformare operează separat în $S'$ şi în $T'$. Ea lasă invariant atît pe $\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r}$, dacă $\mathbf{u}$ nu depinde decît de $t - t_0$, cît şi pe $u_0\delta t$, dacă $u_0$ este un invariant scalar relativ la transformările lui $S'$ şi ale vectorilor $\delta t$ ai timpului.

Aceste condiţii arată că *forma invariantă cea mai generală pentru transformările euclidiene ale lui R se obţine luînd*

$$u_0 = f\left(\frac{1}{2}u^2\right).$$

În acelaşi mod se vede că $\theta_\delta$ asociat lui $U$ şi invariant la transformările euclidiene ale lui $R'$ va fi de forma

$$\theta_\delta = \mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{v}\cdot\delta\boldsymbol{\pi} + w\delta t$$

cu $\delta\mathbf{r}\in E_3$, $\delta\boldsymbol{\pi}\in E_3$, $\mathbf{u}\in E_3$, $\mathbf{v}\in E_3$, şi $w$ o constantă în raport cu $t$ şi funcţie de invarianţii $u^2$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$, $v^2$, deci

$$w = f\left(\frac{1}{2}u^2, \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \frac{1}{2}v^2\right).$$

$\theta_\delta$ este invariant la transformările euclidiene ale lui $E_3$, ca sumă a trei expresii invariante.

*Observaţia* 1. Dacă $\theta_\delta = 0$ pentru $\delta$ generic, se obţine, în mod necesar, $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$.

*Observaţia* 2. Derivata exterioară, pentru operatorul specificat d al lui $\omega_\delta$ este un invariant la transformările euclidiene ale lui $S'$ independente de timp.

În adevăr,

$$D\omega_\delta = \mathrm{d}\mathbf{u}\cdot\delta\mathbf{r} - (\mathrm{d}\mathbf{r} + \mathrm{grad}\, f\mathrm{d}t)\cdot\delta\mathbf{u} + \mathrm{d}f\delta t.$$

Dar este evident că $\mathrm{d}\mathbf{u}$ aparţine lui $S'$, ca şi $\mathbf{u}$ şi $\mathrm{d}\mathbf{r}$, grad $f$, $\mathrm{d}f$ ca şi $f$ însuşi nu depind de $t$ şi sînt invariante la transformările euclidiene ale lui $S'$.

7. *Mişcarea inerţială a punctului material.*

DEFINIŢIA 1. Punctul material în mişcare constituie elementul unui cîmp de vectori care aparţin spaţiului fibrat $\Sigma$ format din asociaţia fiecărui punct $M(\mathbf{r}, t)$ cu un vector (impuls sau cantitate de mişcare) $\mathbf{I}$ din $S'$. Dată fiind echivalenţa dintre $\Sigma$ şi spaţiul $U$, putem defini

punctul material ca punctul $(\mathbf{r}, \mathbf{I}, t)$ din spaţiul fază-timp $U$. Mişcarea punctului material va fi definită ca o categorie mecanică numai după ce vom fi formulat postulatele mecanicii.

Putem însă defini mişcarea punctului material ca o categorie geometrică, pentru a realiza o primă delimitare importantă a acestui obiect. Din acest motiv, introducem definiţiile ce urmează sub denumirea de delimitări.

*Delimitarea* 1. Mişcarea punctului material $(\mathbf{r}, \mathbf{I}, t)$ este o aplicaţie continuă a semidreptei $t \in T$, $t \geqq t_0$ în spaţiul $U$.

Ea are deci un suport $\Gamma(\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \mathbf{I} = \mathbf{I}(t), t(\geqq t_0))$ cu o lege continuă de deplasare pe suport, pornind din $t \geqq t_0$.

*Delimitarea* 2. Mişcarea în sensul obişnuit este restricţia $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \geqq t_0$ la spaţiul $R$ a mişcării considerate mai sus.

Delimitarea 2 este necesară întrucît prima delimitare, cerînd ca $\mathbf{I}(t)$ să fie continuă, impune lui $\mathbf{r}(t)$, de care depinde $\mathbf{I}(t)$, o condiţie mult mai tare decît continuitatea simplă.

*Observaţii asupra delimitărilor precedente.* Am dat pînă acum delimitări simple pentru mişcare, pe care o putem, din acest motiv, denumi geometrică.

Dar mişcările din mecanică sînt mişcări naturale, fapte ale experienţei, mult mai particulare decît mişcările geometrice în sînul cărora ele constituie o clasă particulară.

Delimitările precedente sînt, din acest motiv, utile întrucît ele oferă un cîmp de elemente în care principiile mecanicii au de efectuat o alegere a obiectelor lor.

## § 2. Principii şi postulate

1. *Enunţuri.* Ştim că forma diferenţială invariantă cea mai generală asociată spaţiului fibrat $\Sigma$ şi lui $\mathbf{I}$ are expresia următoare

$$\omega_\delta^{(i)} = \mathbf{I} \cdot \delta\mathbf{r} - F\left(\frac{1}{2} I^2\right)\delta t.$$

Mai amintim că $\omega_\delta^{(i)}$ nu poate fi deocamdată considerată ca un produs scalar în $R$ sau în $R'$, dat fiind că aceste spaţii nu sînt dotate cu o metrică; $\omega_\delta^{(i)}$ este doar suma a două produse scalare ale spaţiilor $S'$ şi $T'$.

Ştim, totodată, că derivata geometrică a lui $\omega_\delta^{(i)}$ este ea însăşi o formă invariantă în $\tilde{U}_{\mathbf{r},\mathbf{I},t}$ la transformările euclidiene ale lui $E_3$ şi că

$$D\omega_\delta^{(i)} = \mathrm{d}\mathbf{I} \cdot \delta\mathbf{r} - (\mathrm{d}\mathbf{r} - \operatorname{grad} F \, \mathrm{d}t) \cdot \delta\mathbf{I} - \mathrm{d}F\delta t.$$

Putem acum, cu ajutorul unui principiu şi a trei postulate, dintre care al doilea are un caracter special, să determinăm mişcarea, şi deci operatorul d.

PRINCIPIU. Mişcarea anulează derivata geometrică a lui $\omega_\delta^{(i)}$, oricare ar fi operatorul $\delta$.

*Postulatul* 1. Raportul $\frac{F}{m}\left(\text{cu } m = \frac{1}{F'}\right)$ este o constantă universală.

Sîntem conduşi să punem $F = \varepsilon m\omega^2$, $m = m_0/\sqrt{1 - \varepsilon\frac{v^2}{\omega^2}}$.

*Postulatul* 2. Se ia $\varepsilon = +1$; îl putem denumi postulatul Einstein-Minkowski.

Constanta universală $\omega$ apare ca o viteză maximă.

*Postulatul* 3 sau postulatul lui Einstein: $\omega = c$ = viteza luminii în vid.

Mecanica punctului material în mişcare inerţială este astfel definită.

Funcţia de stare $F = mc^2$ reprezintă energia masei în mişcare.

2. *Univers şi metrică.* Unul dintre rezultatele importante ale teoriei axiomatice precedente este că face posibilă metrizarea spaţiului $R$.

În adevăr, putem scrie

$$\omega_d^{(i)} = m(\mathbf{r}d\mathbf{r} - c^2dt^2) = -m_0c\sqrt{c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2}.$$

Al doilea membru scoate în evidenţă metrica pseudoeuclidiană

$$d\sigma^2 = c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2$$

a spaţiului $R$. Astfel metrizat, acesta se va numi spaţiul sau universul Einstein-Minkowski şi va fi notat în cele ce urmează cu $R_{EM}$.

Construcţia axiomatică a mecanicii mişcării unei mase materiale este posibilă numai în acest cîmp.

3. *Spaţiile, cîmpurile vectoriale şi tensoriale necesare pentru mecanica într-un cîmp.* Pentru caracterizarea precisă a cîmpurilor care determină mişcarea mai sînt necesare şi alte spaţii.

Spaţiul fibrat* $E$ definit după cum urmează

$$E = \{R_{EM}(P) \mid P \in R\},$$

unde $R$ este baza şi $R_{EM}(P)$ este fibra corespunzătoare punctului generic $P$ al bazei, toate spaţiile $R_{EM}(P)$ fiind izomorfe cu spaţiul vectorial metric $R_{EM}$, poate fi considerat ca sediul unor cîmpuri de o mare generalitate.

* Despre noţiunea generală de spaţiu fibrat şi despre utilitatea ei în mecanică se vorbeşte în paragraful următor.

Cîmpul va fi numit cîmpul lui Maxwell — sau cîmp electromagnetic clasic — pentru care am efectuat deja calculele şi am scris ecuaţiile mişcării — dacă alegem în $R_{EM}(P)$ vectorul $\widetilde{A}(P)$ de componente $A_j(P)$, $j = 1, 2, 3, 0$ astfel ca forma potenţială

$$\omega_\delta^{(p)} = \sum_{j=1,2,3} A_j \delta x_j - A_0 \delta t$$

respectivă să fie produsul scalar în spaţiul $R_{EM}$.

Rezultă atunci, în baza tuturor consideraţiilor precedente că derivata geometrică a lui $\omega_\delta^{(p)}$ va fi de asemenea o formă invariantă la acelaşi grup de transformări, deci la grupul Lorentz-Poincaré.

4. *Spaţiul P al tensorilor relativi la o formă biliniară.* Fie $\mathfrak{M}(A_{jk}(P); j, k = 1, 2, 3, 0)$ o matrice de 16 componente, funcţii de punctul $P$ din spaţiul $R$ şi forma biliniară

$$\psi(X, Y) = \sum_{j,k}^{1,2,3,0} A'_{jk} X_k Y_j - \sum_{j,k}^{1,2,3,0} A'_{jk} X_j Y_k$$

cu

$$A'_{jk} = A_{jk}, \; j = 1, \; 2, \; 3 \; ; \; k = 1, \; 2, \; 3,$$

$$A'_{0k} = - A_{0k}, \quad k = 1, \quad 2, \quad 3, \quad 0,$$

ceea ce dă

$$\psi(X, Y) = (A_{32} - A_{23})(X_2 Y_3 - X_3 Y_2) + (A_{13} - A_{31})(X_3 Y_1 - X_1 Y_3) +$$

$$+ (A_{21} - A_{12})(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) - \sum_{j}^{1,2,3} (A_{j0} + A_{0j})(X_j Y_0 - X_0 Y_j). \qquad (1)$$

5. *Spaţiu de matrice.* Spaţiul matricelor $\mathfrak{M}$ care rămîne invariant la transformările care lasă invariantă forma $\psi(X, Y)$, cînd $X$ şi $Y$ sînt supuse la transformările corelative unei transformări Lorentz-Poincaré a spaţiului $R_{EM}$, va fi notat cu $\mathscr{P}$. În particular matricele $A_{jk} = \dfrac{\partial A_j}{\partial X_k}$, unde $A_j (j = 1, 2, 3, 0)$ sînt componentele unui vector din $R_{EM}$ şi aparţin lui $\mathscr{P}$. Punem

$$\widetilde{\mathscr{P}} = \{\mathscr{P}(P) \mid P \in R\} \qquad (2)$$

unde $\mathscr{P}(P)$ este spaţiul $\mathscr{P}$ al matricelor $\omega(P)$ asociat punctului generic $P$ din $R$.

6. *Un cîmp de tensori.* Un cîmp de tensori $\mathfrak{T}$ va fi definit în $\widetilde{\mathscr{P}}$, alegînd un tensor $\mathfrak{M}(P)$ asociat fiecărui punct $P$ din spaţiul $R$.

Notăm în mod special cu $\mathfrak{T}_M$ cîmpul tensorilor

$$A_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k} (j, k = 1, 2, 3, 0) \text{ dacă } A_1(P), A_2(P), A_3(P), A_0(P)$$

aparţin cîmpului vectorial din spaţiul $R_{EM}$.

Putem acum să formulăm principiile care conduc la legea mişcării unei mase materiale într-un cîmp.

7. *Operatorul mişcare.* Această lege trebuie să definească operatorul mişcare d.

Avem, în primul rînd, un principiu care operează în condiţii pe care le numim clasice.

Acest principiu restrîns a mai fost enunţat.

Fiind dat cîmpul vectorial $\mathfrak{A}(\mathbf{A}, A_0)$ în spaţiul Einstein-Minkowski $R_{EM}$ şi $\omega_\delta^{(r)} = \mathbf{A}\delta\mathbf{r} - A_0\delta t$ produsul scalar invariant specific acestui spaţiu, legea mişcării este definită prin egalitatea

$$D\omega_\delta^{(i)} = D\omega_\delta^{(p)}, \tag{3}$$

pentru $\delta$ arbitrar.

Dar membrul al doilea al lui (3) se scrie, după efectuarea calculelor, ca o formă biliniară :

$$\sum_{j \neq k} (A_{jk} - A_{kj}) \, (\mathrm{d}x_k \delta x_j - \mathrm{d}x_j \, \delta x_k) \tag{4}$$

cu $A_{jk} = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_k}$.

8. *Principiu general.* Dacă în locul cîmpului particular al lui Maxwell, luăm un cîmp $\mathfrak{T}$ aparţinînd lui $\mathscr{P}$ aceleaşi expresii (4), în care $A_{jk}$ sînt doar componentele cîmpului $\mathfrak{T}$, dau legea mişcării sub forma mai generală

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} &= (A_{13} - A_{31}) \, \dot{x}_2 - (A_{21} - A_{12}) \, \dot{x}_3 + (A_{01} + A_{10}), \\
\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} &= (A_{21} - A_{12}) \, \dot{x}_3 - (A_{32} - A_{23}) \, \dot{x}_1 + (A_{02} + A_{20}), \\
\frac{\mathrm{d}p_3}{\mathrm{d}t} &= (A_{32} - A_{23}) \, \dot{x}_1 - (A_{13} - A_{31}) \, \dot{x}_2 + (A_{03} + A_{30})
\end{aligned} \tag{5}$$

şi bilanţul energetic

$$\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t} = \sum_j (A_{j0} - A_{0j}) \, \dot{x}_j. \tag{6}$$

Avem astfel legea mişcării într-un cîmp tensorial $\mathfrak{T}$.

Cîmpurile mezonice sînt de acest tip.

## § 3. Spaţii fibrate şi reprezentarea ecuaţiilor mişcării

1. *Generalităţi.* Diversitatea spaţiilor care servesc la descrierea comportării sistemelor fizice în mişcare poate produce o oarecare perplexitate omului de ştiinţă care doreşte să aibă o intuiţie clară a poziţiei spaţialo-temporale a sistemelor respective, în particular a punctului material a cărui mişcare am studiat-o.

Unul dintre principiile fundamentale ale cercetării noastre a rămas identic cu principiul lui Newton referitor la structura euclidiană a spaţiului şi timpului în care situăm, în esenţă, corpurile fizice.

Tocmai pe această bază au fost obţinute, în paragrafele precedente, legile mişcării; pe această bază am ajuns la grupul Lorentz-Poincaré şi la spaţiul cvadridimensional Einstein-Minkowski. Este acest rezultat contradictoriu cu ipotezele?

Pentru a clarifica aparenta dificultate care a rezultat şi, în general, pentru a clarifica poziţia diferitelor spaţii pe care le-am scos în evidenţă în paragraful precedent, sîntem obligaţi să introducem noţiunea de spaţiu fibrat, a cărui bază rămîne universul lui Newton, produs cartezian dintre spaţiul tridimensional $S$ şi spaţiul unidimensional $T$ al timpului, şi să asociem fiecăruia dintre punctele sale universul Einstein-Minkowski, cel puţin în anumite cazuri.

În prima parte a acestui paragraf prezentăm în linii generale noţiunea de spaţiu fibrat, dar în a doua, spaţiul fibrat al teoriei mişcării inerţiale a punctului material, sau, făcînd o concesie expresiei curente, al teoriei relativităţii.

2. *Universul mecanicii ca spaţiu fibrat.* Notăm acest spaţiu cu $\mathscr{E}$. Fibra sa este universul Einstein-Minkowski, a cărui metrică este $d\sigma^2 = c^2\,dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$. Grupul său este grupul Lorentz-Poincaré, pe care îl notăm cu $LP$ şi care are dubla funcţie următoare:

a) lasă invariantă fiecare fibră în parte şi ecuaţiile fenomenelor care sînt măsurate în ea;

b) reprezintă o corespondenţă biunivocă între fibrele $R_{EM}(P)$ şi $R_{EM}(P')$ cu $P' \neq P$, ceea ce permite să recunoaştem şi să urmărim fenomenele localizate în diferitele fibre care corespund diferitelor puncte ale bazei.

Dubla funcţie precedentă a grupului $LP$ dă posibilitatea de a înlătura diferitele interpretări mai puţin clare ale conceptelor de observator şi de sistem de coordonate spaţiu-timp legate de observator şi împreună cu aceasta legat de aceeaşi fibră, sau, mai bine, a conceptului de observatori legaţi de diferite fibre.

Adaptarea noţiunii de spaţiu fibrat nu-l mai poate pune pe fizician în situaţia greu de acceptat de a renunţa la noţiunile intuitive iniţiale de spaţiu şi timp legate de baza newtoniană a spaţiului fibrat.

3. *Baza spaţiului fibrat.* Această bază este reprezentată, în marea majoritate a experienţelor fizice, la orice scară, începînd cu cea nucleară şi sfîrşind cu cea referitoare la nebuloasele extragalactice, de Universul cvadridimensional $S_N \times T = R$.

Este, însă, evident că adoptarea lui $R$ ca bază a spaţiului fibrat trebuie să satisfacă simultan şi două cerinţe egal obligatorii:

a) Condiţiile impuse de experienţă; b) condiţiile impuse de teoriile adoptate.

Lăsăm la o parte gravitaţia şi problemele ei care apar, după cum vom vedea cînd se găsesc în prezenţă mai multe mase materiale şi considerăm numai cîmpuri de tipul studiat mai înainte. Teoria dezvoltată anterior, ca şi experienţa care este localizată în principiu în fibre, impune ca spaţiul fibrat să aibă structura $R_{EM}$ şi grupul $LP$.

Trebuie de cercetat, atunci, care sînt spaţiile bază ale spaţiului fibrat $E$ compatibile cu fibra $R_{EM}$ şi al căror grup să fie $LP$.

Găsim ca rezultat al acestei cercetări, efectuată de *Ion Bucur*, o caracterizare topologică a bazei $B$, compatibilă cu mai multe modele, în primul rînd cu acela al lui Galilei-Newton, pe care deci îl putem păstra, cel puţin atîta timp cît experienţele nu impun o altă alegere.

Trebuie să facem o deosebire netă între legea fenomenului fizic în cursul desfăşurării sale şi transformările grupului, fie în interiorul fiecărei fibre în parte, fie în corespondenţa dintre o fibră şi alta.

4. *Fibra.* Legea urmăreşte fenomenul în desfăşurarea sa în interiorul bazei şi este reprezentată local, de exemplu, prin ecuaţiile lui Maxwell. Dar, în vecinătatea oricărei poziţii-moment, operaţiile de verificare şi de măsură aparţin fibrei respective.

În modul acesta, dacă urmărim fenomenologia în bază, găsim urma şirului de puncte ale fibrelor respective.

Trecerea de la o poziţie-moment la altă poziţie-moment realizată prin legea fenomenului, poate fi reprodusă printr-o transformare $LP$ între fibrele respective.

Spaţiul reprezentativ al fenomenelor are deci opt dimensiuni. Construcţia sa se bazează pe noţiunea de conexiune infinitezimală. În acelaşi timp, asociem fibrei o formă diferenţială ale cărei valori în algebra Lie a grupului pun în evidenţă invarianţii caracteristici ai structurii fibrate şi, în cele din urmă, ai bazei, care ne interesează în mod special.

5. *Construcţia generatorilor inelului caracteristic al bazei (după Ion Bucur).* Fie $LP$ grupul Lorentz-Poincaré de rang 4 şi $(E, P, B, LP)$ un spaţiu fibrat principal şi diferenţiabil.

Aceasta înseamnă că toate aplicaţiile sînt diferenţiabile de clasă suficient de mare. Ne propunem să găsim expresiile diferenţiale ale generatorilor în inelul caracteristic al bazei. Nu facem de la început nici o ipoteză cu privire la dimensiunea varietăţii. Aceasta poate fi mai mare decît 4. Noţiunile pe care le folosim pentru a defini conexiunea infinitezimală Ehresmann-Lichnerowicz sînt următoarele:

$T$ este spaţiul tangent la varietatea $E$ în punctul $z$; $L(\mathrm{LP})$ este algebra Lie a grupului $LP$; aplicaţia $(x, y) \to [x, y]$ reprezintă funcţia care defineşte structura de algebră Lie a grupului; $\tau_g$ este omeomorfismul indus de elementul $g$ din $LP$; $\tau_g$ lasă invariante fibrele lui $\mathscr{E}$ şi este indus de translaţiile la dreapta ale grupului $LP$; $V_z$ este subspaţiul lui $T$ tangent la fibra care conţine pe $z$.

Familia subspaţiilor $V_z$ este invariantă pentru omeomorfismele $\tau_g$. Orice vector din $V_z$ defineşte un element bine determinat în $L(\mathrm{LP})$. Dacă $V$ este un spaţiu vectorial şi $\varphi : V \to L(\mathrm{LP})$ este o aplicaţie liniară, atunci $[\varphi, \varphi] : V \times V \to L(\mathrm{LP})$ reprezintă forma liniară antisimetrică definită de egalitatea

$$[\varphi, \varphi]\ [\xi, \eta] = [\varphi(\xi), \varphi(\eta)].$$

O conexiune pe spaţiul fibrat $\{E, P, B, LP\}$ este definită de o descompunere a spaţiului $T_z$, pentru orice $z \in E$, sub forma

$$T_z = V_z \otimes H_z, \tag{1}$$

pentru care trebuie să fie verificate următoarele condiţii:

a) subspaţiul $H_z$ depinde, în forma diferenţială, de punctul $z$;

b) familia subspaţiilor $H_z$ este invariantă la omeomorfismele $\tau_g$;

Elementele lui $H_z$ sînt orizontale, cele ale lui $V_z$ sînt verticale.

Forma curburii conexiunii se obţine folosind proiecţia pe subspaţiul $V_z$, dat de descompunerea (1). Obţinem, împreună cu conexiunea $\{\mathscr{E}, P, B, LP\}$ de mai sus, o formă diferenţială $\omega$ pe LP, cu valori în algebra Lie $L(\mathrm{LP})$.

Fie $\alpha \in I_z$, atunci prin definiţie $\omega(\alpha)$ este elementul algebrei $L(\mathrm{LP})$ generat de poziţia lui $\alpha$ în $V_z$.

Forma curburii unei astfel de conexiuni este dată de expresia

$$\Omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega], \tag{2}$$

LP fiind un grup liniar, $\Omega$ pune în evidenţă componentele $\Omega_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ care în forma diferenţială sînt reale şi verifică relaţiile

$$\Omega_{ii} = 0, \quad \Omega_{0i} = \Omega_{i4}, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$
$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Expresia diferenţială a invarianţilor caracteristici rezultă din dezvoltarea după puterile lui $\lambda$ a determinantului

$$\begin{vmatrix} \lambda + \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ -\Omega_{12} & \lambda + \Omega_{22} & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & \lambda + \Omega_{33} & \Omega_{34} \\ -\Omega_{14} & -\Omega_{24} & -\Omega_{34} & \lambda + \Omega_{44} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Această dezvoltare este dată de polinomul

$$\lambda^4 + W_2\lambda^2 + W_4,$$

unde coeficienţii $W_2$ şi $W_4$ sînt de forma definită pe $B$ şi generează inelul caracteristic

$$W_1 = W_3 = 0,$$

$$W_2 = \Omega_{12}^2 + \Omega_{13}^2 + \Omega_{23}^2 - \Omega_{14}^2 - \Omega_{24}^2 - \Omega_{34}^2; \tag{5}$$

$$W_4 = -(\Omega_{12}\Omega_{34} - \Omega_{13}\Omega_{24} + \Omega_{14}\Omega_{23})^2.$$

6. *Consideraţii finale.* 1°. Se pot considera colanţurile definite de formele $W_i$ prin integrare pe lanţurile spaţiului $B$. Se obţin cocicluri, deci elemente bine determinate în inelele de coomologie $H^*(B, R)$.

Subinelele astfel obţinute ne dau măsura distanţei între spaţiul fibrat considerat şi spaţiul fibrat trivial.

2°. Concepţiile lui Newton relative la timp şi la spaţiu corespund cu o destul de mare precizie concepţiei noastre de spaţiu fibrat.

Recapitulînd, concepţia noastră de univers fibrat constă într-o bază care este universul $S \times T$ al lui Newton şi apoi, în fiecare moment şi poziţie, avem un univers în sensul Minkowski-Einstein care este sediul şi, în acelaşi timp, rezultatul diferitelor noastre măsuri.

Iată acum reflecţiile lui Newton în „Scolia" care urmează primelor sale opt definiţii din *Principia* şi ne apropie de ideea de spaţiu fibrat:

„Timpul absolut, adevărat şi matematic, în sine şi după natura sa, curge în mod egal fără nici o legătură cu ceva extern; cu un alt nume el se cheamă şi durată. Timpul relativ (nu în sensul lui Galilei sau Einstein, ci atît cît se referă la fenomene — *N. A.*) aparent şi comun este acea măsură (precisă sau nu, sensibilă şi externă) a oricărei durate determinată prin mişcare, care se foloseşte de obicei în loc de timpul adevărat, ca oră, ziuă, lună, an.

„Spaţiul absolut, considerat în natura sa, fără nici o relaţie cu ceva extern, rămîne totdeauna asemenea sieşi şi imobil. Spaţiul relativ (aceeaşi observaţie ca şi pentru timp — *N. A.*) este o măsură sau o parte oarecare mobilă a celui absolut, care se relevă simţurilor noastre prin poziţia sa faţă de corpuri şi de obicei este confundat cu spaţiul imobil. Spaţiile absolut şi relativ sînt aceleaşi ca specie şi mărime, dar nu rămîn totdeauna aceleaşi ca măsură. Căci dacă, de pildă, pămîntul se mişcă, spaţiul nostru aerian, care, faţă de pămînt, rămîne totdeauna acelaşi, va fi cînd o parte cînd alta a spaţiului absolut... şi astfel el se va schimba continuu".

## § 4. Forțe și legături

1. *Generalități.* Legea a doua a mecanicii lui Newton, exprimată prin egalitatea $m\mathbf{a}=\mathbf{F}$, ca și definițiile date de el pentru forța de inerție, rezistență, forțe de accelerație sau motrice, forțe de atracție sau de repulsie, se referă la ceea ce, în general, denumim forțe de masă.

Alte tipuri de forță, ca forța de coeziune, tensiunile sau presiunile, nu sînt forțe în sensul newtonian cel mai propriu — adică forțe de masă — și apar ca atare numai prin convenții de calcul și interpretare. Dacă, de exemplu, în cadrul teoriei mecanicii clasice, punctul cu masa $m$ se găsește sub influența forței $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3,)$ dar este obligat să rămînă pe suprafața a cărei ecuație este $\varphi(x_1, x_2, x_3)=0$, atunci avem pe de o parte egalitatea

$$(m\mathbf{a} - \mathbf{F}) \cdot \delta\mathbf{r} = 0,$$

pe de altă parte condiția

$$\text{grad } \varphi \cdot \delta\mathbf{r} = 0,$$

de unde relația

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \lambda \text{ grad } \varphi, \tag{1}$$

în care $\lambda$ și $\mathbf{a}$ sînt determinate ținînd seama și de ecuația $\varphi = 0$. Relația (1), unde $\lambda$ este presupus determinat, arată că $\lambda$ grad $\varphi$ trebuie să fie considerat ca reprezentînd o forță: o forță convențională.

Teoria pe care o dezvoltăm este, prin natura ei, mai apropiată de experiență, urmînd pas cu pas indicațiile acesteia. Ea consideră direct forțele a căror expresie este de forma $\mathbf{F} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$, care este specifică forțelor din cîmpul electromagnetic.

Dacă cîmpul $\mathbf{H}$ este nul, ceea ce se întîmplă, de exemplu, dacă $\mathbf{A} = \text{grad } \Phi$, atunci

$$\mathbf{F} = \text{grad } A_0 - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \tag{2}$$

ne găsim în cazul forței electrice, care se reduce ea însăși la un gradient dacă $\mathbf{A}$ este independent de $t$. Există deci o oarecare generalitate în expresia forței care apare în teoria expusă și care nu trebuie interpretată, în mod necesar, ca o forță electrică sau electromagnetică. În cazul mai general, al cîmpului neolonom, expresia forței este dată sub forma tensorială de ecuațiile (2) și, în ceea ce privește dependența de poziția punctului, este de forma

$$\frac{dp_j}{dt} = A_{j0}, \quad j = 1, 2, 3$$

presupunînd că

$$A_{13} = A_{31},\ A_{21} = A_{12},\ A_{23} = A_{32},\ A_{0j} = 0 \quad (j=1, 2, 3).$$

Expresia olonomă $\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H}$ sau cea neolonomă dată de (2) sînt singurele care reprezintă, în teoria pe care o expunem, o forţă propriu-zisă. Mai observăm că atît expresia olonomă cît şi expresia (2) pot conţine derivatele vectorului poziţie, dar numai de gradul întîi. Deci ele nu pot corespunde marii varietăţi de probleme experimentale care impun şi ordine mai mari decît unu, ca în cazul rezistenţei mediului proporţională cu pătratul vitezei.

În acest caz, nu avem decît două posibilităţi:

1°. Să considerăm că $\widetilde{A}(A_1, A_2, A_3, A_0)$ depinde nu numai de poziţia $x_1, x_2, x_3, t$, dar şi de viteza $\mathbf{v}(x_1', x_2', x_3')$.

În acest caz, derivata exterioară a lui $\omega_j^{(p)}$ are următoarea formă

$$D\omega_\delta^{(p)} = \mathrm{d}\mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{r} - \mathrm{d}A_0 \delta t - \mathrm{d}\mathbf{r}\left(\operatorname*{grad}_{\mathbf{r}} \mathbf{A} \cdot \delta\mathbf{r} + \operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} \mathbf{A}\, \delta\mathbf{p} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\, \delta t\right) + \tag{3}$$

$$+ \mathrm{d}t\left(\operatorname*{grad}_{\mathbf{r}} A_0 \cdot \delta\mathbf{r} + \operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} A_0 \delta\mathbf{p} + \frac{\partial A_0}{\partial t}\, \delta t\right).$$

Egalitatea

$$D\omega_\delta^{(i)} = D\omega_\delta^{(p)}$$

ne dă atunci ecuaţiile

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} - \operatorname*{grad}_{\mathbf{r}} \mathbf{A} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \operatorname*{grad}_{\mathbf{r}} A_0 = \operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} \mathbf{A} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} + \operatorname*{grad}_{\mathbf{r}} A_0,$$

$$\operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} \mathbf{A} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} A_0,$$

$$\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial A_0}{\partial t}.$$

Ultimele două ecuaţii trebuie să fie identic verificate pe baza primei, ţinînd seama totdeauna că avem $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$.

2°. A doua cale prin care se introduc forţele este aceea a legăturilor pe care, pentru generalitate, le considerăm de forma

$$\mathbf{C}\delta\mathbf{r} + \mathbf{D}\delta\mathbf{p} + L\delta t = 0, \tag{4}$$

unde, **C**, **D** şi $L$ depind de **r**, **p** şi $t$. Se pot avea mai multe legături de tipul precedent.

Ţinînd seama atunci de principiul mişcării

$$D\omega_\delta^{(i)} = D\omega_\delta^{(p)}$$

şi de condiţia (4), ecuaţiile care rezultă sînt

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} \mathbf{A} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} + \operatorname*{grad}_{\mathbf{r}} A_0 + \lambda\mathbf{C},$$

$$\operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} \mathbf{A} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \operatorname*{grad}_{\mathbf{p}} A_0 + \lambda\mathbf{D},$$

$$\frac{\mathrm{d}(mc^2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A_0}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} - \lambda L$$

la care trebuie să se adauge, pentru determinarea lui $\lambda$, relaţia obţinută din (4), în care luăm d în loc de $\delta$

$$\mathbf{C}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \mathbf{D}\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} + L = 0.$$

2. *Forţă şi gravitate.* Atracţie gravitaţională este denumirea curentă care se dă forţei corespunzătoare interacţiunii rezultate din prezenţa mai multor mase materiale. Cîmpul gravitaţional este produs de prezenţa unei mase faţă de alte mase care se găsesc în vecinătatea ei. Acest cîmp şi forţa pe care o obţinem nu-şi găsesc un corespondent în teoria precedentă. Ele se manifestă în teoria lui Einstein sub formă geometrică. Prezenţa unei mase modifică structura spaţiului, dă acestui spaţiu o curbură specială şi modifică, astfel, legile mişcării.

În teoria pe care o dezvoltăm, în schimb, nu spaţiul de bază îşi schimbă structura, ci elementele inerţiale ale corpurilor în prezenţă.

Este evident că totdeauna vom putea pune în evidenţă un cîmp şi o forţă, utile în calculul matematic, care pot fi interpretate drept cîmp gravitaţional şi forţă gravitaţională.

# MIŞCAREA PERIHELIULUI

Notă de Ieronim Mihăilă
Universitatea din Bucureşti

Din formulele mişcării din capitolul III, neglijînd masa de interacţiune $\varkappa$, obţinem ecuaţiile mişcării Soarelui şi a planetei, şi anume

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{L}, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = -\mathbf{L}, \tag{1}$$

unde

$$\mathbf{p}_1 = m_1\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2, \mathbf{p}_2 = m_2\mathbf{v}_2 + \mu\mathbf{v}_1, \tag{2}$$

$$\mathbf{L} = 2c^2(1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2/c^2)\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial\mu}{\partial r}. \tag{3}$$

Pentru a obţine ecuaţiile mişcării relative a planetei faţă de Soare, căutăm un sistem de referinţă (inerţial) preferenţial. În acest scop să considerăm punctul al cărui vector de poziţie este

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{(m_1 + \mu)\boldsymbol{\rho}_1 + (m_2 + \mu)\boldsymbol{\rho}_2}{m_1 + m_2 + 2\mu}. \tag{4}$$

Deoarece energia $H = c^2(m_1 + m_2 + 2\mu)$ se conservă, obţinem

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2 + 2\mu} + \frac{\dot{m}_2 + \dot{\mu}}{m_1 + m_2 + 2\mu}\mathbf{r}. \tag{5}$$

Să arătăm acum că $\dot{\boldsymbol{\rho}} = \text{const.}$, dacă ne mărginim la termenii în $v_1^2/c^2$ şi $v_2^2/c^2$.

Observăm pentru aceasta că (1) ne dau

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[m_1^0\dot{\boldsymbol{\rho}}_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}_1^2}{c^2}\right) + \mu_0\dot{\boldsymbol{\rho}}_2\right] = f\frac{m_1^0 m_2^0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2k}{c^2 r}\right), \\
&\frac{d}{dt}\left[m_2^0\dot{\boldsymbol{\rho}}_2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}_2^2}{c^2}\right) + \mu_0\dot{\boldsymbol{\rho}}_1\right] = -f\frac{m_1^0 m_2^0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}_1\dot{\boldsymbol{\rho}}_2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2k}{c^2 r}\right),
\end{aligned} \tag{6}$$

unde

$$\mu_0 = -\frac{1}{2}f\frac{m_1^0 m_2^0}{c^2 r},$$

iar $\lambda(r)$ a fost considerat de forma $k/r$, $k$ urmînd a se determina folosind avansul periheliului.

Obţinem de aici

$$\dot{\rho} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2 + 2\mu_0} + \frac{m_2^0}{m_1 + m_2 + 2\mu_0}\left(\frac{\mathbf{v}_2 \dot{\mathbf{v}}_2}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{f m_1^0 \dot{r}}{c^2 r^2}\right)\mathbf{r} =$$

$$= \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2 + 2\mu_0} + \frac{m_2^0}{m_1 + m_2 + 2\mu_0}\left(-\frac{\mathbf{v}_2}{c^2}\frac{f m_1^0}{r} + \frac{1}{2}\frac{f m_1^0}{c^2 r}\frac{\dot{r}}{r}\mathbf{r}\right)$$

şi, prin urmare, întrucît mişcarea este aproape circulară,

$$\dot{\rho} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2 + 2\mu_0} - \frac{m_2^0}{m_1 + m_2 + 2\mu_0}\mathbf{v}_2\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2} + \\ + \frac{1}{2}\frac{m_2^0}{m_1 + m_2 + 2\mu_0}\dot{r}\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{7}$$

Deoarece pentru majoritatea planetelor $m_2^0/m_1^0 < |\dot{\mathbf{r}}|/c^2$, putem considera

$$\dot{\rho} = \frac{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2 + 2\mu_0} = \text{const.} \tag{7'}$$

Cu alte cuvinte, reperul cu originea în punctul de vector $\rho$ este, în limitele aproximaţiei considerate, un reper inerţial.

Faţă de acest reper avem relaţiile

$$\begin{aligned}(m_1 + \mu_0)\,\mathbf{r}_1 &= -(m_2 + \mu_0)\,\mathbf{r}_2,\\ (m_1 + \mu_0)\,\dot{\mathbf{r}}_1 &= -(m_2 + \mu_0)\,\dot{\mathbf{r}}_2,\\ (m_1 + \mu_0)\,r_1 &= (m_2 + \mu_0)\,r_2,\end{aligned} \tag{8}$$

unde $\mathbf{r}_1$ şi $\mathbf{r}_2$ sînt vectorii poziţie, iar ecuaţiile mişcării capătă forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\mathbf{r}}_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{r}}_1^2}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{f m_1^0}{c^2 r}\right)\right] = \frac{f m_2^0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_1^0}{m_2^0}\frac{\dot{\mathbf{r}}_1^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2k}{c^2 r}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\mathbf{r}}_2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{f m_2^0}{c^2 r}\right)\right] = -\frac{f m_1^0}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{m_2^0}{m_1^0}\frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2k}{c^2 r}\right). \tag{9}$$

Reţinînd numai termenii de ordinul al doilea în $|\dot{\mathbf{r}}|/c$, după ce am scăzut membru cu membru în (9), obţinem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\mathbf{r}}_2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{c^2} + \frac{1}{2}\frac{f m_2^0}{c^2 r}\right) - \dot{\mathbf{r}}_1\right] = -\frac{f(m_1^0 + m_2^0)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 + \frac{2k}{c^2 r}\right). \tag{10}$$

Folosind relaţiile

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{m_1 + \mu_0}{m_1 + m_2 + 2\mu_0}\dot{\mathbf{r}},$$

putem scrie

$$\dot{\mathbf{r}}_2 \frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{c^2} = \dot{\mathbf{r}} \frac{\dot{r}^2}{c^2} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_2 + 2\mu_0} \right)^3 \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}.$$

Atunci (10) devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dot{\mathbf{r}}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}\right)\right] = -\frac{f(m_1^0 + m_2^0)}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 + \frac{2k}{c^2 r}\right),$$

din care rezultă

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{f(m_1^0 + m_2^0)}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2k}{c^2 r}\right) \tag{11}$$

sau

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu^*}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(1 - \frac{2\alpha\mu^*}{c^2 r} + \frac{2\beta\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}\right), \tag{12}$$

unde

$$\mu^* = f(m_1^0 + m_2^0), \quad 2\alpha\mu^* = -2k, \quad 2\beta = -3/2. \tag{13}$$

Evident, mișcarea este plană. Ea se produce sub acțiunea forței newtoniene din mișcarea relativă și a forței perturbatoare

$$\frac{\mu^*}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\left(\frac{2\alpha\mu^*}{c^2 r} - \frac{2\beta\,\mathbf{r}^2}{c^2}\right). \tag{14}$$

Dacă considerăm planul mișcării ca plan de referință $x$, $y$, ecuațiile mișcării devin

$$\ddot{x} = -\frac{\mu^* x}{r^3} + X, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu^* y}{r^3} + Y, \tag{15}$$

unde

$$X = \frac{\mu^* x}{r^3}\left(\frac{2\alpha\mu^*}{c^2 r} - \frac{2\beta\dot{\mathbf{r}}^2}{c^2}\right),$$

$$Y = \frac{\mu^* y}{r^3}\left(\frac{2\alpha\mu^*}{c^2 r} - \frac{2\beta\mathbf{r}^2}{c^2}\right). \tag{16}$$

Deoarece forța $(X, Y)$ este mică, obținem în primă aproximație ecuația mișcării eliptice. Prin integrare obținem orbita osculatoare. Acțiunea forței adiționale (perturbatoare) poate fi considerată ca o perturbație

și mișcarea periheliului poate fi studiată prin metoda variației constantelor (a se vedea, de exemplu, J. Chazy, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, t. I, cap. III, Gauthier-Villars, Paris, 1928).

Ecuația diferențială a longitudinii periheliului este de forma

$$\frac{d\tilde{\omega}}{du} = \frac{\sqrt{1-e^2}\,(1-e\cos u)}{n^2a^2e}\left\{X\frac{\partial x}{\partial e} + Y\frac{\partial y}{\partial e}\right\}, \tag{17}$$

unde $a$ este semiaxa mare a orbitei osculatoare, $e$ excentricitatea, $n$ mișcarea medie (viteza unghiulară medie) și $u$ anomalia excentrică.

Derivatele $\dot{x}$ și $\dot{y}$ se calculează din formulele mișcării eliptice, unde timpul și anomalia excentrică sînt considerate variabile. Derivatele coordonatelor în raport cu $e$ se calculează din aceleași formule considerînd anomalia excentrică și $e$ ca variabile. În planul mișcării formulele mișcării eliptice sînt

$$\begin{aligned} x &= a(\cos u - e)\cos\tilde{\omega} - a\sqrt{1-e^2}\sin u\sin\tilde{\omega}, \\ y &= a(\cos u - e)\sin\tilde{\omega} + a\sqrt{1-e^2}\sin u\cos\tilde{\omega}, \\ r &= a(1-e\cos u), \\ u &= e\sin u = nt + l_0 - \tilde{\omega}, \end{aligned} \tag{18}$$

unde $l_0$ este longitudinea medie la momentul $t = 0$.

Ecuația longitudinii periheliului devine

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = \frac{\mu^*\sqrt{1-e^2}}{c^2ae^2}\left\{\frac{2\beta}{1-e\cos u} + \frac{2\alpha - 4\beta - 2\beta(1-e^2)}{(1-e\cos u)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(-2\alpha + 4\beta)(1-e^2)}{(1-e\cos u)^3}\right\}. \tag{19}$$

Creșterea longitudinii periheliului corespunzătoare intervalului de timp în care anomalia excentrică variază de la $u$ la $u + 2\pi$ se obține integrînd (18) între aceste limite. Aceasta dă

$$\delta\tilde{\omega} = \frac{2\pi\mu^*}{c^2a(1-e^2)}(-\alpha + 2\beta). \tag{20}$$

În sistemul solar, după eliminarea perturbațiilor planetare, periheliul prezintă o mișcare directă, care poate fi reprezentată prin relația

$$\delta\tilde{\omega} = \frac{6\pi\mu^*}{c^2a(1-e^2)}. \tag{21}$$

Comparînd (20) şi (21), obţinem condiţia

$$-\alpha + 2\beta = 3, \tag{22}$$

din care deducem

$$k = \frac{9}{2}\mu^* = \frac{9}{2}f(m_1^0 + m_2^0) \tag{23}$$

şi deci

$$\lambda(r) = \frac{9}{2}\frac{f(m_1^0 + m_2^0)}{r}. \tag{24}$$

Prin urmare, se obţine pentru $\mu$ expresia

$$\mu = -\frac{1}{2}\frac{f m_1^0 m_2^0}{c^2 r\sqrt{1 - \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2/c^2}}\left(1 + \frac{9}{2}\frac{f(m_1^0 + m_2^0)}{c^2 r}\right) \tag{25}$$

## BIBLIOGRAFIE


1. O. Onicescu. *L'expansion de l'Univers*, C. R. Acad. Sci. Paris, (sept.) 1967, **265**, 358–360.
2. — *L'aspect mécanique de l'expansion de l'Univers*, C. R. Acad. Sci. Paris, (novembre) 1972, **275**, 1015–1018.
3. — *La mécanique invariantive des n corps*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 1969, **XIV**, 1577–1584.
4. — *Die Mechanik des starren Körpers*, Revue de Mecanique Appliquée, 1958, **III**, 179–184.

# THE INVARIANTIVE MECHANICS AND THE COSMOLOGY

The mechanics is the science of the motion of bodies in the material Universe. In the course of centuries this frame of our experience has been conceived in various manners.

Sometimes this frame was conceived in a very complete and precise manner, in the sense that the Universe includes the stars, the solar system and the bodies of the earthly experience. Such was the case of Aristotle's mechanics and that of Ptolemy's mechanics. However, each of these worlds conserved its special motion laws. A proper and universal mechanical principle, unique for the whole Universe, has been formulated for the first time by Archimedes who however did not try to construct a corresponding theory. I am thinking of the lever principle which was known as a universal principle between action and reaction.

In modern times the idea of the material identity of all the bodies of the Universe made its way; it achieved a great victory with the Copernican theory, was recorded as an indisputable truth in Leonardo's manuscript and reached its final victory with Galilei's celestial discoveries.

This certainty on the identity of substance between the bodies of the Universe led to the science of their motion. At first, with Galilei, it was restricted to the motion under the own weight on the earth, and then, with Newton, it was extended to all motions on the earth and in the solar system, aspiring ever since to involve all the Universe conceived as a unity of material bodies in a system of interactions which maintains its stability and ensures in this manner its existence.

The rapid astronomic discoveries from Newton up to the present time have strengthened this idea of the unity of the Universe, which reached its climax with the discovery of the expansion phenomenon, governed by Hubble's law.

This culminating point of the experimental knowledge corresponds to the advent of the theory of relativity, which for a moment gave the illusion of a geometric image of this Universe in its spatial totality and temporal eternity, trying to explain by gravitation, as determinant element of its material structure, its general properties.

Adopting this position, that is that of a science of the motion in which the presence of the whole Universe is felt in each of each components, however not through structural geometrical ways, but through the analysis of the elementary processes of motion and following the line of the Newtonian thought, the invariantive mechanics without living the spatial-temporal frame of the old science has re-found the gravitation as

the inertial interaction of masses and together with it a second inertial interaction similar to an elastic repulsive force. Slightly sensible to current distances but very sensible to intergalactic distances, this interaction is for a great part responsible for Hubble's expansion and meanwhile for the stability of the Universe in its necessarily finite limits.

The elaboration of this doctrine begun with the articles *O nouă mecanică a sistemelor materiale* (A new mechanics of material systems), Revista Universităţii şi a Politehnicii din Bucureşti, n°3, 1954, *Introduction à une mécanique invariante des systèmes*, Revue de Math. pures et appl., Tome II, 1957, *Une mécanique des systèmes inertiaux. Une théorie de la gravitation. Une mécanique des petites distances*, Journal of Math. and Mech., Tome 5, N° 7, 1958.

These articles were followed by others concerning the continuous systems, such as for instance *Die Mechanik des starren Körpers*, Rev. Méc. Appl., Tome III, N° 3, 1958, *La mécanique de certaines particules stables*, Rendiconti Sem. Math. Univ. Padova, Tome 28, 1958, *On the two body problem*, Rev. de Math. pures et appliquées, Bucarest, Tome V, N° 1, 1960, *L'Univers antiminkowskien*, Rev. de Physique, Bucarest, Tome V, N$^{os}$ 3—4, 1961, as well as the lectures given at the Institute of Mechanics, University of Trieste, 1964, when this new mechanics was termed invariantive mechanics.

A partial synthesis of these theories is included in the second part of the volume *Mecanica* (*The Mechanics*), Editura Tehnică, Bucharest, 1969. On this occasion the astonishing result has been published, that Hubble's empirical law corresponds to the theoretical law of the conservation of the impulse of any system of sufficiently stable two galaxies.

In a subsequent work published in Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris, in the autumn of 1972, I could show that Hubble's law verifies for any pair of galaxies, with sufficient stability, within the interactions of the whole system of bodies of the Universe.

# TABLE OF CONTENTS


**Foreword** . . . . . 7

Chapter I. **Motion of the material point** . . . . . 9

§ 1. Inertial motion . . . . . 9

§ 2. The Minkowski-Einstein Universe . . . . . 13

§ 3. The photon and wave associated to the material point 16

§ 4. Motion in a field . . . . . 19

§ 5. Antiminkowskian Universes . . . . . 25

Chapter II. **Mechanics of stable particles** . . . . . 28

§ 1. Inertial motion . . . . . 28

§ 2. Inertial motion and motion in a field . . . . . 34

Chapter III. **Invariantive mechanics of systems of material points** . . 41

§ 1. Inertial system of two material points. . . . . 41

§ 2. Newtonian interpretation. Two universal laws of interaction 50

Chapter IV. **Invariantive mechanics of continuous systems** . . . . . 52

§ 1. Principles . . . . . 52

§ 2. Purely inertial motion of the components . . . . . 52

§ 3. Relations between motion quantities resulting from the system internal constraints . . . . . 54

§ 4. External constraints . . . . . 59

§ 5. Fields in general . . . . . 61

Chapter V. **Two-body system (stable particles)** . . . . . 62

§ 1. Inertial motion of a two-body system . . . . . 62

§ 2. Motion equations . . . . . 66

Chapter VI. **The Invariantive cosmology** . . . . . 67

§ 1. Introduction. . . . . 67

§ 2. Invariantive mechanics of the system $\mathscr{S}_n$ . . . . . 68

§ 3. Hypothesis of the infinite number of galaxies . . . . . 75

§ 4. Newtonian interpretation. The two kinds of inertial forces 77

§ 5. Final considerations on the assumptions used in the extension of cosmology . . . . . 77

Chapter VII. **The relativistic cosmology** . . . . . 78

§. 1. Albert Einstein's cosmology . . . . . 78

§. 2. The noncontradiction between the stationary and mechanical state . . . . . 80

Chapter VIII. **Commentaries** . . . . . 81

§ 1. Spaces and axioms of motion. . . . . 81

§ 2. Principles and postulates . . . . . 85

§ 3. Fibred spaces and the representation of the motion equations . . . . . 89

§ 4. Forces and constraints . . . . . 93

**Motion of the perihelion** (Note by Ieronim Mihăilă) . . 96

Redactor: ELENA HENNING
Tehnoredactor: MELUȘ TUREAC

*Bun de tipar 17.08.1974. Tiraj 1910 ex. Hîrtie scris I A tratată, cu 83% grad alb, format 16/70×100 de 71 G/m². Coli de tipar 6,5. C.Z. pentru biblioteci mari și mici: 531,1: 113/119.*

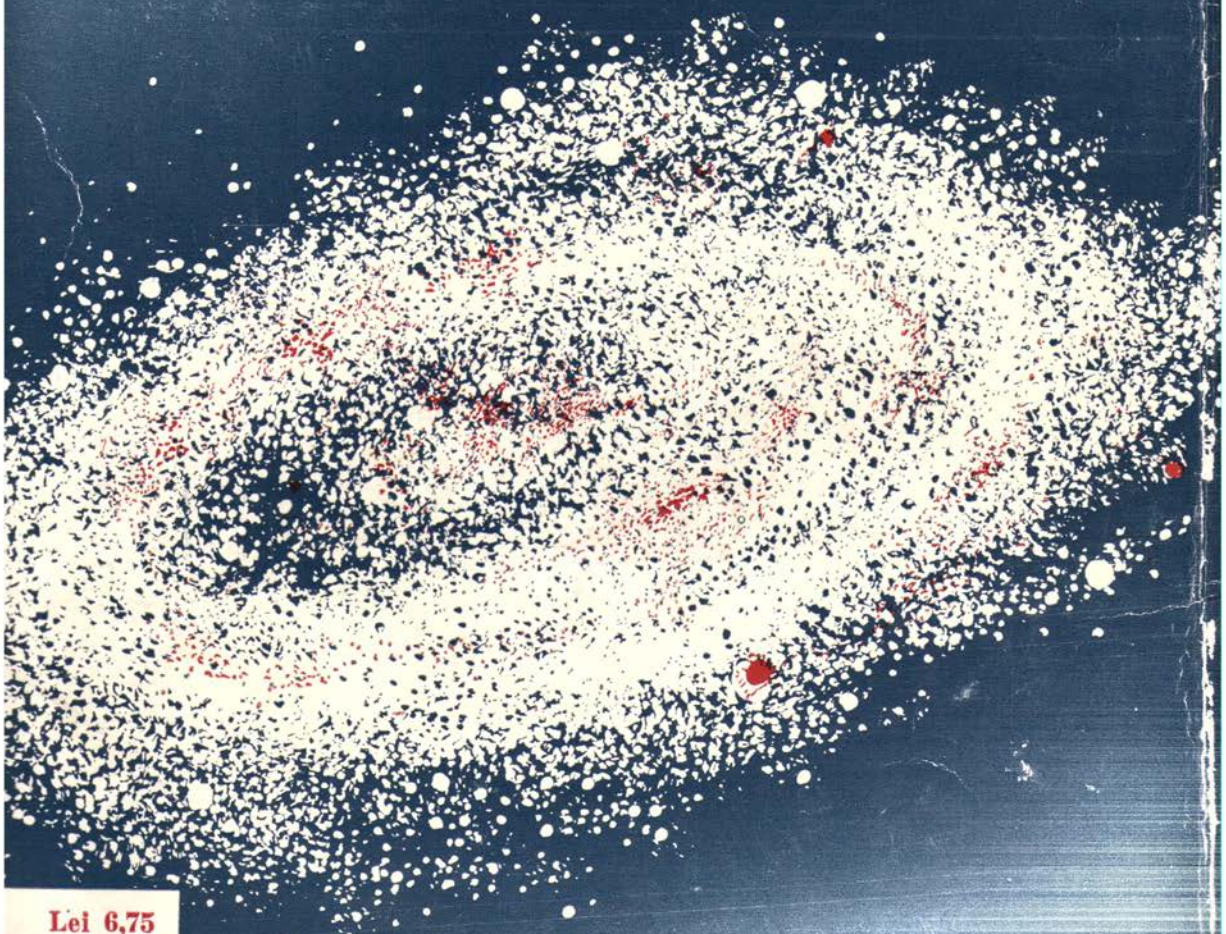
Întreprinderea poligrafică Informația, str. Brezoianu nr. 23–25. București.

REPUBLICA SOCIALISTĂ ROMÂNIA

I.P.I. c. 168

02. IUN. 2011

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA



Lei 6,75